تاریخ دریافت: ۹۵/۰۴/۲۸
تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۸/۱۱

جداسازی متغیرها در بهینه‌یابی طرح لرزه‌ای به کمک درون‌یابی کروی

حسین مشکی
دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

عبدالرضا جغتائی (نویسنده مسئول)
دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران،
joghatae@sharif.edu

چکیده

در این مقاله روش بهینه‌یابی جدیدی با بهره‌گیری از تقریب در تابع هدف و قیدها جهت استفاده در معادلات لاگرانژ ارائه شده است. همچنین برای این مدل، الگوریتمی در قالب فرایند حل عددی به‌منظور نزدیک کردن جواب تقریبی به جواب دقیق بهینه برای مسائل واقعی مهندسی و به‌طور خاص مسائل سازه‌ای ارائه شده است. تقریب ارائه شده در این مدل عددی به فرم کره در فضای n بعدی بوده که با بیان جدیدی از تعریف عمومی انحناء و شعاع انحناء ارائه شده است. این تقریب باعث جدا شدن متغیرهای طراحی از هم شده به‌طوری‌که تنها مجهول در دستگاه معادلات بهینه، ضرایب لاگرانژ می‌باشند. متغیرهای طراحی به کمک روابط استخراج شده برحسب ضرایب لاگرانژ مستقیماً بدون تحلیل هیچ‌گونه معادله‌ای حاصل می‌شوند. هر گام محاسباتی شامل دو بخش، یکی به دست آوردن جواب تقریبی بهینه و دیگری برگرداندن جواب تقریبی بر روی قیدهای فعال به‌منظور انجام تقریب مجدد می‌باشد. با جداسازی متغیرهای طراحی از معادلات لاگرانژ، زمان محاسبات به‌خصوص برای تحلیل‌های تاریخچه-زمانی مورد نظر در طرح‌های بهینه‌ی لرزه‌ای می‌تواند ذخیره شود. با استفاده از این روش دو مثال سازه‌ای به‌عنوان بخش اصلی سیستم مهار جانبی قاب خمشی بتنی و مهاربندی مورد بررسی قرار گرفته که نتایج آن کاملاً منطبق با نتایج حاصل از روش پنالتی خارجی می‌باشند. در این روش به دلیل کاهش تعداد متغیرها و طول گام بلند در محاسبات، سرعت همگرایی بالا می‌باشد.

کلمات کلیدی: کره n بعدی، شعاع انحناء، نقطه مرجع، ضرایب لاگرانژ، مسائل مقید

۱- مقدمه

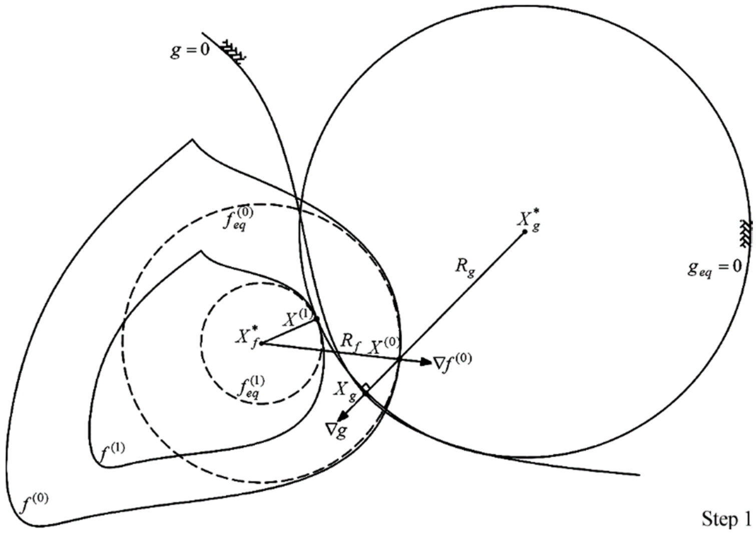
مشکل اکثر روش‌های بهینه‌یابی درگیر شدن متغیرهای طراحی در دستگاه معادلات حل بوده که حجم محاسبات پرتکرار بهینه‌یابی را به‌شدت برای مسائل واقعی مهندسی و غیره افزایش می‌دهد. در این مقاله از روش لاگرانژ استفاده شده که زیرمجموعه روش‌های بهینه‌یابی مستقیم [1] می‌باشد. از جمله روش‌های مستقیم [۱-۴]، روش خطی‌سازی پیاپی [2] [۵] می‌باشد. در این روش که با تکنیک سیمپلکس [3] قابل حل بوده، تعداد معادلات درگیر مسئله به تعداد قیدهای اصلی به‌علاوه دو برابر تعداد متغیرهای طراحی ناشی از حد بالا و پایین هر متغیر می‌باشد [۶] و یا در روش برنامه‌ریزی درجه دوم [4] [۷-۹] علاوه بر متغیرهای طراحی، ضرایب لاگرانژ [5] نیز به مجهولات اضافه می‌شود. حتی در روش‌های غیرمستقیم مانند روش پنالتی [6] [۱۰] نیز تعداد معادلات مسئله‌ی بهینه‌یابی به تعداد متغیرهای طراحی مسئله می‌باشد. به‌هرحال در روش پیشنهادی به دلیل به‌کارگیری توابع کروی [7] که در عملیات مشتق‌گیری برای معادلات لاگرانژ [8] به کارگرفته شده، متغیرهای طراحی از دستگاه معادلات جدا شده و به‌طور مستقل به دست می‌آیند. ازاین‌جهت حجم محاسبات می‌تواند به تعداد متغیرهای طراحی کاهش یابد.

در روش‌هایی مانند روش خطی‌سازی پیاپی [۵] یا برنامه‌ریزی درجه دوم [۷-۹] از بسط تیلور به‌منظور تقریب خود مقدار تابع

استفاده شده درحالی‌که در روش پیشنهادی، انحناء تابع با کره‌ای n بعدی تقریب زده می‌شود. با تعریف انحناء بر اساس تغییرات گرادیان تابع، شعاع انحناء[9] به‌عنوان یک شاخص تعیین می‌شود. بنابراین با به دست آوردن شعاع انحناء در هر نقطه مورد محاسبه و به کارگیری آن در مدل تقریبی به‌صورت کره‌ای مماس بر تابع، هم گرادیان و هم تغییرات گرادیان تابع در طول هر گام محاسباتی با مقدار ثابت تقریب زده می‌شود.

در مورد استفاده از تقریب کروی باید به این نکته توجه داشت که پس از هر گام محاسباتی ازآنجاکه جواب به‌دست‌آمده دقیق نیست، معادلات مربوط به قیود فعال را ارضاء نکرده و از سوی دیگر برخلاف روش‌های مبتنی بر بسط تیلور خطی [۱، ۱۱] و یا سهمی درجه دوم [۶، ۱۲، ۱۳، ۱۴]، خود تابع تقریب زده نمی‌شود؛ بنابراین لازم است در گام‌های بعدی محاسبات، جواب تقریبی بر روی معادلات مربوط به قیدهای فعال برگردانده شود. در این روش، چنانچه نقطه جواب تقریبی حاصل از معادلات لاگرانژ نقطه مرجع[10] نامیده شود، معیار برگشتن این نقطه بر روی هر یک از معادلات قید، بر اساس نزدیک‌ترین فاصله قید اصلی (کمترین مانده خطا) از جواب تقریبی (نقطه مرجع) انتخاب شده است. این در حالی است که روش‌هایی مانند روش‌های متّکی به بسط تیلور، در هر گام محاسباتی برای تقریب زدن از روی هر قید، ذاتاً تأکیدی بر حداقل کردن مانده‌ی خطا ندارند. البته استفاده از مفهوم کمترین فاصله یا کمترین انحراف در دیگر روش‌های بهینه‌یابی از جمله روش تصویر گرادیان نیز استفاده شده که در این روش بردار راستای مماسی باید در کمترین انحراف از بردار منفی گرادیان تابع هدف که یک بردار مرجع بهینه بوده، قرار گیرد [۱۵-۱۶].

به‌طورکلی هر گام محاسباتی شامل دو بخش، یکی به دست آوردن جواب تقریبی بهینه و دیگری برگرداندن جواب تقریبی بر روی تک‌تک قیدها به‌منظور انجام تقریب مجدد می‌باشد. در شکل (۱) نحوه‌ی به‌هنگام کردن نقطه‌ی مرجع از $X^{(0)}$ به $X^{(1)}$ به‌صورت گرافیکی نشان داده شده است. به‌طوری‌که در شکل (۱) دیده می‌شود نقطه X_0 حدس اولیه می‌باشد. نقطه X_g را می‌توان به‌گونه‌ای به دست آورد که هم بر روی قید $g=0$ قرار داشته و هم نزدیک‌ترین فاصله از نقطه X_0 را دارا باشد. منظور از نقطه با نزدیک‌ترین فاصله این است که بردار حاصل از وصل کردن نقاط X_g و X_0، بر قید $g=0$ عمود باشد. یعنی در امتداد گرادیان قید، ∇_g در نقطه‌ی X_g باشد. حال در نقطه X_g مقدار شعاع انحناء، R_g برای قید $g=0$ را می‌توان به‌دست آورد. با به کارگیری R_g، و نیز داشتن راستای گرادیان قید $g=0$ در نقطه X_g می‌توان مختصات مرکز کره، X_g^* را به دست آورد. در اینجا با به‌کارگیری R_g و X_g^* کره‌ای معادل با قید $g=0$ به‌صورت $g_{eq}=0$ حاصل می‌شود. به‌همین ترتیب برای تابع هدف



شکل (۱): نحوه‌ی به‌هنگام کردن نقطه‌ی مرجع $X^{(0)}$ به $X^{(1)}$

نیز می‌توان تابع کروی معادل $F_{eq}^{(0)}$ را به دست آورد. با توجه به اینکه تابع هدف یک رویه ثابت و مشخصی نیست و دارای منحنی‌های هم‌تراز است، بنابراین تابع معادل را می‌توان در نقطه حدس اولیه $X^{(0)}$ به‌دست آورد. با تعیین شعاع انحنای تابع هدف، R_f و گرادیان آن، ∇_f در نقطه‌ی $X^{(0)}$ می‌توان مختصات نقطه‌ی مرکز کره، X_f^* را به دست آورد. حال با داشتن کره‌ی معادل قید $g_{eq}=0$ و مرکز کره‌ی تابع هدف، X_f^* در فضای کروی می‌توان نقطه‌ی بهینه $X^{(1)}$ را به دست آورد بر این اساس از مرکز کره تابع هدف، X_f^* کوچک‌ترین کره‌ای که قید معادل $g_{eq}=0$ را برآورده کند کره $F_{eq}^{(1)}$ است که مماس بر قید معادل $g_{eq}=0$ در نقطه‌ی $X^{(1)}$ می‌باشد. مطابق شکل (۱) نقطه‌ی $X^{(1)}$ در نزدیکی قید اصلی فعال $g=0$ می‌باشد. با جایگزینی نقطه‌ی $X^{(1)}$ به‌جای $X^{(0)}$ مراحل فوق را جهت به‌دست آوردن نقطه‌ی بهینه‌ی بعدی، $X^{(2)}$ می‌توان تکرار کرد تا نقطه‌ی حاصله نزدیک‌تر به قید فعال $g=0$ شود.

۲- بیان مدل تعمیم‌یافته کروی به روش لاگرانژ

در این قسمت ابتدا صورت عمومی مسائل بهینه‌یابی بیان شده و در ادامه فرم تقریب کروی آن ارائه می‌شود و نهایتاً پارامترهای مورد نیاز در مسئله‌ی بهینه‌یابی کروی مشخص می‌شوند.

یک مسئله‌ی بهینه‌یابی در فرم عمومی آن به شکل زیر می‌باشد:

$$min\ f = f(X) \qquad (۱)$$

تحت شرایط:

$$g_j(X) \le 0 \qquad j=1,2,...,m \qquad (۲)$$

$$g_j(X) = 0 \qquad j=m+1,...,p \qquad (۳)$$

چنانچه در فضای نرم به‌جای ۲ یا ۳ متغیر، از n متغیر در یک معادله‌ی کره استفاده شود، مسئله‌ی بهینه‌یابی فوق می‌تواند با مدل تقریبی کروی به شکل زیر بیان شود.

$$\min\ f=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{if}^*)^2-R_f^2+f(X^{(k)}) \qquad (۴)$$

تحت شرایط:

$$g_j(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{ij}^*)^2-R_j^2 \le 0 \qquad j=1,2,...,m \qquad (۵)$$

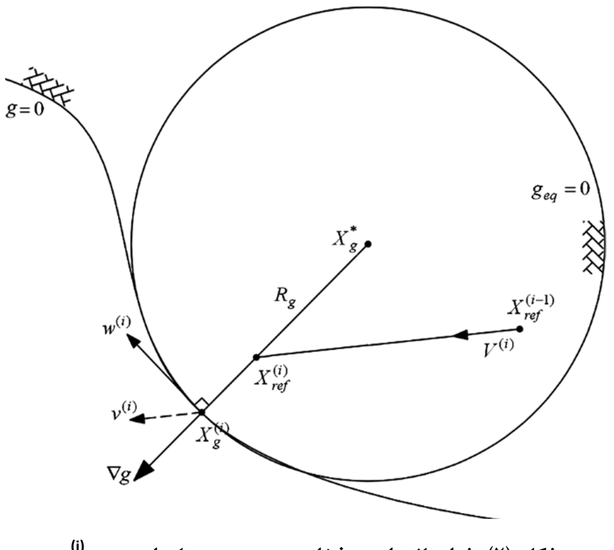
$$g_j(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{ij}^*)^2-R_j^2 = 0 \qquad j=m+1,...,p \qquad (۶)$$

که در آن k تعداد تکرار محاسبات، n تعداد متغیر، m تعداد قید نامساوی، از $m+1$ تا p تعداد قید مساوی، x_i متغیر طراحی iام، x_{if}^* مؤلفه‌ی iام مختصات مرکز کره تابع هدف، x_{ij}^* مؤلفه‌ی iام مختصات مرکز کره قید jام، R_f شعاع انحناء تابع هدف، R_j شعاع انحناء قید jام و $f(X^{(k)})$ مقدار تابع هدف در تکرار kام می‌باشد. در معادلات لاگرانژ مقدار ثابت $f(X^{(k)})$ حذف می‌شود.

۳- تعیین پارامترها و مشخصات توابع تقریبی

۳-۱- شعاع انحناء کره n بعدی

در مدل کره مماسی، گرادیان و نیز تغییرات گرادیان تابع به کمک تعریف انحناء تقریب زده شده و از این طریق شعاع انحناء به‌عنوان شاخص اصلی، به‌صورت یک مقدار ثابت در هر گام محاسباتی، معادل‌سازی می‌شود. با توجه به اینکه شعاع انحناء عمود بر سطح رویه و در راستای گرادیان است، بنابراین شعاع انحناء در داخل یک صفحه متعلق به دو بردار گرادیان، ∇_g ، و بردار حد فاصل دو نقطه بهینه حاصل از دو گام آخر محاسبات می‌باشد. بردار اخیر مطابق شکل (۲) مسیر بهینه را نشان می‌دهد که با حرف V مشخص شده است. حال با داشتن دو بردار ∇_g و



شکل (۲): شعاع انحناء در فضای n بعدی در راستای بهینه $w^{(i)}$

V می‌توان بردار w که مماس بر رویه و در مسیر بهینه می‌باشد را تعیین نموده تا به کمک آن شعاع انحناء برای یک مسیر مشخص از سطح رویه تعیین شود. به‌منظور دستیابی به چنین تعریفی ابتدا راستای بهینه بر اساس دو نقطه بهینه متوالی، مطابق شکل (۲)، به‌صورت زیر به دست آورده می‌شود.

بردار مسیر بهینه برابر است با

$$V^{(i)} = \frac{X_{ref}^{(i)} - X_{ref}^{(i-1)}}{\left\| X_{ref}^{(i)} - X_{ref}^{(i-1)} \right\|} \qquad (۷)$$

با توجه به مشخص بودن دو بردار V و ∇_g، بردار عمود بر ∇_g و مقید به بردار V برابر خواهد بود با [۱۷]:

$$w_0 = V - \frac{\langle V, \nabla g \rangle}{\langle \nabla g, \nabla g \rangle} \nabla g \qquad (۸)$$

لازم به ذکر است که مطابق تعریف باید بردار جهت در مشتق سویی، w به‌صورت یکه به‌کار برده شود بنابراین:

$$w = \frac{w_0}{\|w_0\|} \qquad (۹)$$

از سوی دیگر با تعریف بردار یکه گرادیان که عمود بر سطح بوده داریم:

$$G = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \qquad (۱۰)$$

حال مطابق تعریف، شعاع انحناء برابر با نسبت تغییرات طول انحناء به تغییرات زاویه‌ی انحناء می‌باشد [۱۸]. بنابراین مطابق شکل (۳) و بر اساس یک تناسب ساده داریم:

$$d\phi_w = \frac{dS_w}{R} = \frac{\|dG_w\|}{\|G\|} \qquad (۱۱)$$

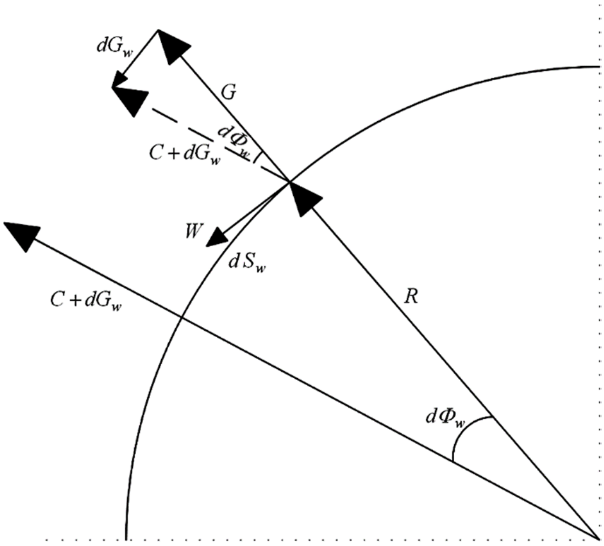
که در آن ϕ_w بردار زاویه‌ی انحناء در امتداد w و S_w طول قوس در امتداد w می‌باشد.

با توجه به اینکه بردار گرادیان به‌صورت یک بردار یکه تعریف شده، برای رابطه (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{R} = \frac{\|dG_w\|}{dS_w} = \|\nabla G.w\| \qquad (۱۲)$$

که در آن:

$$\nabla G = \nabla\{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \qquad (۱۳)$$



شکل (۳): شعاع انحناء، طول قوس، بردار یکه گرادیان

با محاسبه‌ی مشتقات بردار G نسبت به متغیرها می‌توان برای ماتریس ∇G رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$DG = \|\nabla g\|^{-2} H \left(\|\nabla g\| I - (\nabla g . \nabla g^T) \|\nabla g\|^{-1} \right) \qquad (۱۴-\text{الف})$$

که در آن:

$$D_{G_{ij}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g / \partial x_i}{\|\nabla g\|} \right) \qquad (۱۴-\text{ب})$$

و H ماتریس هسین [۱۱] تابع و I ماتریس واحد می‌باشد. ازآنجاکه بردار w بر بردار ∇g عمود است، ترم دوم رابطه (۱۴-الف) برابر صفر شده؛ بنابراین شعاع انحناء بر اساس روابط (۱۲) و (۱۴-الف) برابر است با:

$$R = \frac{\|\nabla g\|}{\|H.w\|} \qquad (۱۵)$$

۳-۲- مرکز کره در فضای n بعدی

از هر نقطه معلوم مانند X واقع بر روی تابع می‌توان شعاع انحناء را در یک راستای مشخص از فضای n بعدی، به‌ترتیب بالا به‌دست آورد. چنانچه برای نقطه‌ی معلومی از یک تابع، شعاع کره و بردار یکه گرادیان نرمال شده، موجود باشند می‌توان به‌صورت زیر مرکز کره را تعیین نمود.

با مساوی قرار دادن بردار گرادیان یکه تابع با تابع کروی معادل آن داریم:

$$G_{ij}=\frac{\left\|x_{ij}-x_{ij}^{*}\right\|}{R_j} \tag{۱۶}$$

بنابراین به کمک فرم برداری رابطه (۱۶) مرکز کره برابر است با:

$$X_j^{*}=X_j-R_jG_j \tag{۱۷}$$

حال با به دست آوردن شعاع انحناء و مرکز کره می‌توان تابع هدف تقریبی و قیدهای مسئله را مطابق روابط (۱) تا (۳) ایجاد نمود.

۴- به‌هنگام کردن نقطه‌ی بهینه‌ی تقریبی (نقطه مرجع)

بعد از اینکه پارامترهای توابع تقریبی برای معادلات و یا نامعادلات قیدها و نیز تابع هدف حاصل شد، تابع لاگرانژ برای توابع تقریبی را می‌توان تشکیل داد. معادلات لاگرانژ به‌منظور حداقل کردن تابع هدف با ملاحظه‌ی قیود اصلی می‌تواند مد نظر قرار گیرد. اگر مسئله‌ی بهینه‌یابی مطرح شده در روابط (۱) تا (۳) را در نظر بگیریم تابع لاگرانژ آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\min_x l= f+\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j \tag{۱۸}$$

در این رابطه f تابع هدف، g_j قید jام و μ_j ضریب لاگرانژ قید jام می‌باشند.

در اینجا باید توجه داشت تکنیک حل برای قیدهای نامساوی $g_j\leq 0$ به روش قیدهای فعال است بدین معنی که در ابتدای هر گام محاسباتی فرض بر این است که همه‌ی قیدها فعال بوده و به‌صورت مساوی در نظر گرفته می‌شوند. با به دست آوردن ضرایب لاگرانژ چنانچه ضریب قیدی منفی باشد قید مربوط به منفی‌ترین ضریب لاگرانژ از مسئله حذف شده و مجدداً محاسبات تکرار می‌شود. این کار آن‌قدر تکرار می‌شود تا هیچ قید با ضریب منفی مطابق شرایط کان- تاکر وجود نداشته باشد.

با قرار دادن مشتق رابطه (۱۸) برابر صفر به‌عنوان معادله لاگرانژ و جایگزینی توابع تقریبی f و g_j تعریف شده در روابط (۴) تا (۶) در این معادله، بردار متغیرهای طراحی برابر خواهد شد با:

$$X=\left(X_f^{*}+X_{n\times m}^{*}\times\mu\right)/\left(1+1^{T}\mu\right) \tag{۱۹}$$

به‌طوری‌که طبق تعاریف قبلی مؤلفه‌های ماتریس X^{*} و بردار X_f^{*} به ترتیب برابر x_{ij}^{*} و x_{if}^{*} خواهند بود. بنابراین متغیر طراحی به‌صورت غیر درگیر برحسب ضرایب لاگرانژ حاصل شد.

۵- تعیین ضرایب لاگرانژ

با استفاده از معادله‌ی لاگرانژ به‌صورت $\frac{\partial L}{\partial \mu_j}=0$، قید jام برابر صفر می‌شود که فرم برداری قید معادل کروی آن برابر خواهد بود با:

$$(X-X_j^{*})^{T}(X-X_j^{*})=R_j^{2} \tag{۲۰}$$

با جایگذاری مقدار بردار X از رابطه (۱۹) در رابطه (۲۰) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$g_j=\mu^{T}A_j\mu+B_j^{T}\mu+C_j=0 \qquad j=1,2,...,m \tag{۲۱}$$

به‌طوری‌که:

$$A_j=X^{*T}X^{*}-2(X_j^{*}1_{m\times 1}^{T})^{T}X^{*}+(X_j^{*T}X_j^{*}-R_j^{2})1_{m\times m} \tag{۲۲}$$

$$B_j^{T}=2(X_f^{*}-X_j^{*})^{T}(X^{*}-X_j^{*}1_{m\times 1}^{T})-2R_j^{2}1_{m\times 1}^{T} \tag{۲۳}$$

$$C_j=(X_f^{*}-X_j^{*})^{T}(X_f^{*}-X_j^{*})-R_j^{2} \tag{۲۴}$$

بدین ترتیب معادلات لاگرانژ مستقل از متغیرهای طراحی و تنها وابسته به ضرایب لاگرانژ حاصل می‌شود:

۶- برگرداندن نقطه‌ی مرجع بر روی سطح قیدها

بر اساس معادلات و روابط فوق می‌توان به‌طور تقریبی در هر گام محاسباتی شعاع انحناء و مرکز کره را برای هر یک از قیدها و تابع هدف به دست آورد. در تابع هدف، محاسبه‌ی پارامترهای توابع تقریبی برای نقطه‌ی بهینه (نقطه مرجع) حاصل از گام قبلی انجام می‌شود اما برای قیدهای مسئله ابتدا نقطه‌ی مرجع حاصل از گام قبلی بر روی تک‌تک قیدها با کوتاه‌ترین فاصله (کمترین مانده خطا) از آن برده شده سپس پارامترهای توابع تقریبی برای نقاط واقع بر روی قیدها به دست می‌آید. بردن یک نقطه بر روی قید با کوتاه‌ترین فاصله‌ی آن نقطه از سطح قید، خود یک مسئله‌ی بهینه‌یابی می‌باشد به‌طوری‌که تابع هدف و قید آن

به‌صورت زیر می‌تواند تعریف شود:

$$\min_x l_j(x)^2 \quad (۲۵)$$

تحت شرایط:

$$g_j(x) = 0 \quad (۲۶)$$

به‌طوری‌که:

$$l_j(x)^2 = l_j(x)^T l_j(x) = (X_j - X_{ref}^{(k)})^T (X_j - X_{ref}^{(k)}) \quad (۲۷)$$

که در آن $X_{ref}^{(k)}$ مختصات نقطه مرجع در kامین تکرار محاسبات و X_j نقطه‌ی واقع بر روی قید j ام با کوتاه‌ترین فاصله از آن، $l_j(x)$ بزرگی فاصله بین X_j و $X_{ref}^{(k)}$ می‌باشد.

با نوشتن تابع و معادله‌ی لاگرانژ برای این مسئله و به دست آوردن ضریب لاگرانژ نهایتاً برای نقطه بر روی قید با نزدیک‌ترین فاصله تا نقطه‌ی بهینه‌ی تقریبی خواهیم داشت:

$$X_j^{(i+1)} = -\frac{\left\| l_j \right\|}{\left\| \nabla g_j \right\|} \nabla g_j \Big|_{X_j^{(i)}} + X_{ref}^{(k)} \quad (۲۸)$$

همچنین برای اینکه نقطه بر روی قید باشد داریم:

$$g_j(x) = 0 \quad (۲۹)$$

بنابراین با یک حدس اولیه و به دست آوردن نقطه‌ی $X_j^{(i+1)}$ از رابطه (۲۸) می‌توان n-1 متغیر X_{ij} آن را در رابطه (۲۹) گذاشت و متغیر nام را از آن به‌عنوان یک نقطه‌ی جدید به دست آورد و با تکرار این دو مرحله و رسیدن به همگرایی لازم، نقطه واقع بر روی قید با کوتاه‌ترین فاصله از نقطه‌ی بهینه‌ی تقریبی را به دست آورد.

۷- الگوریتم بهینه‌یابی

بر مبنای روابط و مطالب ارائه شده‌ی قبلی، الگوریتمی جهت حل مسائل واقعی مهندسی ارائه شده که توسط آن دو سازه در بخش‌های بعدی بهینه خواهند شد. اساس الگوریتم چنین است:

الف- انتخاب یک نقطه‌ی موجه به‌عنوان نقطه‌ی مرجع؛

ب- بردن نقطه‌ی مرجع بر روی هر یک از قیدها در «نزدیک‌ترین فاصله» از این نقطه؛

ج- معادل‌سازی هریک از قیدها به‌صورت قید کروی در نقاط حاصل از بند «ب» و جایگزینی تقریب کروی معادل برای تابع هدف در نقطه‌ی مرجع

ه- تشکیل و حل دستگاه معادلات درجه دوم مربوط به ضرایب لاگرانژ بر اساس قیدهای معادل موجود

و- حذف ضرایب و معادلات لاگرانژی که مقدار آنها منفی هستند (به ترتیب از منفی‌ترین آنها) و حل مجدد دستگاه معادلات تا رسیدن به جواب مثبت یا صفر برای تمام ضرایب لاگرانژ

ی- تعیین مختصات نقطه‌ی مرجع به کمک روابط وابسته به ضرایب لاگرانژ. چنانچه قیدی در این نقطه غیر موجه شود، این قید فعال محسوب شده و برگشت به بند «ه»

ز- درصورتی‌که نقطه‌ی حاصل برای قیدهای فعال کروی (نقطه‌ی مرجع) بر روی قیدهای اصلی مسئله نیز باشد پایان بهینه‌یابی بوده در غیر این صورت برگشت به بند «ب» با جایگزینی نقطه‌ی مرجع جدید به‌جای نقطه‌ی مرجع قبلی و تکرار گام‌های قبلی

لازم به ذکر است در این الگوریتم چنانچه هیچ قیدی فعال نباشد و مسئله نامقید شود طبق رابطه (۱۹) ضرایب لاگرانژ برابر صفر شده و مقدار X برابر X_f^* خواهد شد. حال برای تعیین مقدار X چنانچه به رابطه (۱۷) توجه شود، دیده می‌شود که مسئله به روش تندترین کاهش[12] در مسائل نامقید تبدیل شده است. کافیست به شیوه‌ی تندترین کاهش شعاع انحناء به‌عنوان یک عدد اسکالر به‌منظور تعیین طول گام و رساندن تابع هدف به مقدار حداقل، بهینه شود. به‌هرحال در این مقاله با توجه به معروفیت روش تندترین کاهش، مسائل نامقید مورد بحث قرار نمی‌گیرند.

۸- مثال‌ها

در مثال‌های ساده‌ی زیر از تحلیل استاتیکی استفاده شده است؛ چون در تبیین روش پیشنهادی، عمده تفاوت اساسی روش تاریخچه- زمانی نسبت به استاتیکی از منظر بهینه‌یابی تکرار محاسبات بهینه در گام‌های زمانی مختلف می‌باشد. درحالی‌که هدف این مقاله نمایش ساده‌ای از جزئیات روش پیشنهادی است.

۸-۱- مثال خرپا

مطابق شکل (۴) این خرپا به‌عنوان بخشی از سیستم مهاربندی با دو عضو تحت بار جانبی F قرار گرفته است چنانچه هدف حداقل کردن وزن خرپا با محدودیت تنش در اعضاء و تغییر مکان قائم نقطه رأس آن باشد خواهیم داشت:

$$\min \ f(A_1, A_2) = \rho L(\frac{2}{\sqrt{3}} A_1 + A_2) \qquad (۳۰)$$

$$|\sigma_i| \le \sigma_0, \quad i = 1,2,3 \qquad (۳۱)$$

$$\delta \le \delta_0, \ \delta_0 = \frac{\sigma_0 L}{E} \qquad (۳۲)$$

با حل خرپا با زاویه $\alpha = ۳۰^\circ$ تحت نیروی F نتایج زیر برای قیدهای تغییر مکان و تنش حاصل می‌شود:

$$\frac{8}{\sqrt{3} A_1} + \frac{3}{A_2} \le \frac{E\delta_0}{FL} = \frac{\sigma_0}{F} \qquad (۳۳)$$

$$A_1 \ge \frac{2F}{\sigma_0}, \ A_2 \ge \frac{\sqrt{3}F}{\sigma_0} \qquad (۳۴)$$

با تغییر متغیر به‌صورت زیر:

$$x_1 = \frac{2F}{\sigma_0 A_1} \ge 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}F}{\sigma_0 A_2} \ge 0 \qquad (۳۵)$$

نهایتاً مسئله به شکل زیر تبدیل می‌شود. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۹] مراجعه شود.

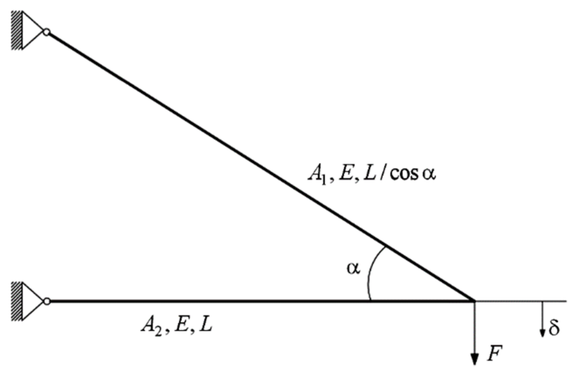
$$\min_{x_1, x_2} \ f(x_1, x_2) = \frac{4}{3x_1} + \frac{1}{x_2}$$

(۳۶-الف)

تحت شرایط:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} x_1 + \sqrt{3} x_2 \le 1$$

(۳۶-ب)



شکل (۴): خرپای دو عضوی تحت قیدهای تنش و تغییر مکان

به‌منظور حل مسئله، حدس اولیه برای نقطه‌ی مرجع برابر $X^{(0)} = (0.5,0.5)$ انتخاب شده است. این نقطه مطابق جدول (۱) در هر گام محاسباتی بر روی قید برده شده است.

جدول (۱): نقطه روی قید با کوتاه‌ترین فاصله از نقطه مرجع

X (نقطه روی قید)	X_1	
	x_{11}	x_{12}
گام ۱	۰/۲۱۷۱	۰/۲۸۷۸
گام ۲	۰/۲۰۴۱	۰/۳۰۵۲
گام ۳	۰/۲۳۳۶	۰/۲۶۵۹
گام ۴	۰/۲۱۸۲	۰/۲۸۶۵
گام ۱۶	۰/۲۲۳۵	۰/۲۷۹۴

در نقاط واقع بر روی تابع هدف و قید باید شعاع انحناء تعیین شود. با توجه به اینکه مسئله دوبعدی است هر انتخاب برای بردار جهت تنها به یک شعاع انحناء منجر می‌شود بنابراین در گام نخست بردار جهت برای شعاع انحناء به‌صورت اختیاری مطابق جدول (۲) انتخاب شده است.

جدول (۲): بردار مماسی مربوط به ۲ نقطه متوالی مرجع برای تابع هدف و قید

W (بردار مماسی)	W_1		W_f	
	w_{11}	w_{12}	w_{f1}	w_{f2}
گام ۱	۰/۶	-۰/۸	۰/۶۵۰۸	-۰/۷۵۹۳
گام ۲	-۰/۶	۰/۸	۰/۴۴۹۰	۰/۴۴۹۰
گام ۳	۰/۶	-۰/۸	۰/۵۹۱۳	-۰/۸۰۶۵
گام ۴	-۰/۶	۰/۸	-۰/۵۱۱۸	۰/۸۵۵۱
گام ۱۶	-۰/۶	۰/۸	-۰/۵۴۴۲	۰/۸۳۹۰

با تعیین بردار گرادیان و ماتریس هسین تابع هدف و قیدها به‌ترتیب در نقطه‌ی مرجع و نقطه‌ی روی قید، شعاع انحناء و متعاقباً مرکز کره‌ی معادل آنها، مطابق جدول (۳) محاسبه شده است.

با داشتن مرکز کره و شعاع انحناء تابع هدف و قید، ضرایب ماتریسی معادلات لاگرانژ مطابق روابط (۲۲) تا (۲۴) قابل محاسبه بوده و به کمک معادلات لاگرانژ ضریب لاگرانژ مطابق جدول (۴) در هر گام به کمک حل عددی محاسبه شده است. با استفاده از ضریب لاگرانژ و با به‌کارگیری رابطه (۱۹) نقطه

جدول (۳): شعاع انحناء و مرکز کره برای تابع هدف و قید

	R (شعاع انحناء)		X^* (مختصات مرکز کره)			
	R_1	R_f	X^*_1		X^*_f	
			x^*_{11}	x^*_{12}	X^*_{f1}	X^*_{f2}
گام ۱	۱۰۰۰	۰/۳۳۳۲	-۷۹۹/۷۸۲۹	-۵۹۹/۷۱۲۲	۰/۷۵۳۰	۰/۷۱۶۸
گام ۲	۱۰۰۰	۰/۱۵۵۱	-۷۹۹/۷۹۵۹	-۵۹۹/۶۹۴۸	۰/۶۳۸۶	۰/۵۶۹۶
گام ۳	۱۰۰۰	۰/۱۵۸۹	-۷۹۹/۷۶۶۴	-۵۹۹/۷۳۴۱	۰/۶۲۸۱	۰/۵۹۳۹
گام ۴	۱۰۰۰	۰/۱۵۴۹	-۷۹۹/۷۸۱۸	-۵۹۹/۷۱۳۵	۰/۶۳۲۵	۰/۵۸۰۳
گام ۱۶	۱۰۰۰	۰/۱۵۵۸	-۷۹۹/۷۷۶۵	-۵۹۹/۷۲۰۶	۰/۶۳۰۷	۰/۵۸۴۸

جدول (۴): نتایج عددی تا گام محاسباتی ۴ و گام نهایی

گام‌ها		گام ۱	گام ۲	گام ۳	گام ۴	گام ۱۶
فاصله نقطه مرجع از قید	$\|\|l_1\|\|$	۰/۰۲۱۷	۰/۰۴۹۱	۰/۰۲۵۷	۰/۰۱۳۵	-۶e۵/۵۴۶
ضریب لاگرانژ	μ_1	-۳e۰/۶۸۶۱	-۳e۰/۵۰۶۲	-۳e۰/۵۱۲۴	-۳e۰/۵۰۷۷	-۳e۰/۵۰۹۱
نقطه‌ی مرجع	x_1	۰/۲۰۴۱	۰/۲۳۳۶	۰/۲۱۸۲	۰/۲۲۶۳	۰/۲۲۳۵
	x_2	۰/۳۰۵۲	۰/۲۵۵۹	۰/۲۸۶۵	۰/۲۷۵۷	۰/۲۷۹۴
تابع هدف	f	۹/۸۰۸۶	۹/۴۶۹۰	۹/۶۰۲۴	۹/۵۲۰۶	۹/۵۴۵۶
اندازه تغییرات نقطه مرجع	$\|\| X^{(i-1)} - X^{(i)} \|\|$	۰/۳۵۴۳	۰/۰۹۱۸	۰/۰۲۵۷	۰/۰۱۳۵	-۶e۵/۵۴

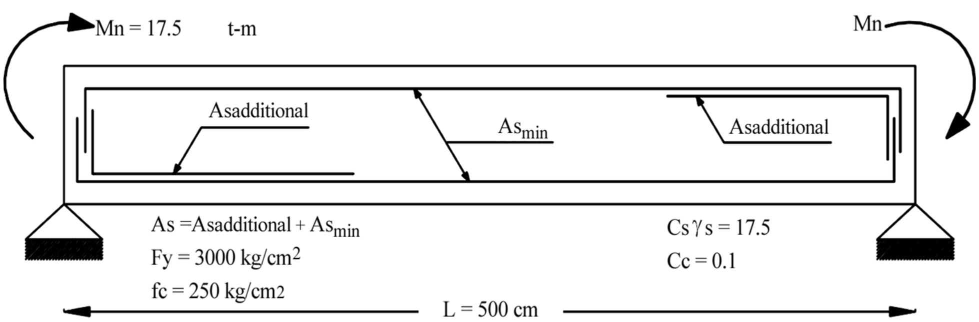
مرجع جدید تعیین شده است که در گام شانزدهم مقدار خطا به عدد ناچیزی رسیده است. مطابق جدول (۴) تابع هدف به‌مرور کم شده است. با توجه به اینکه این مسئله فقط یک قید داشته فاصله متوالی نقاط مرجع از هم برابر فاصله‌ی نقاط مرجع از قید نیز شده است. حل این مسئله با روش پنالتی خارجی [۱۳] نیز انجام شده که نتایج کاملاً بر هم منطبق هستند.

۸-۲- مثال تیر بتنی

مطابق شکل (۵) تیر بتنی تحت تأثیر لنگر خمشی هم‌جهت در دو انتها در نظرگرفته شده که همانند شرایطی است که یک قاب خمشی تحت بار جانبی تجربه می‌کند. این تیر با حداقل آرماتور به‌صورت سراسری و با آرماتور اضافی در محدوده‌ی یک‌سوم طرفین تیر لحاظ شده است؛ بنابراین تابع هدف و قیدها به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\min_{\substack{x_1=As \\ x_2=b_w \\ x_3=d}} f = C_c L b_w (d + d') + \gamma_s C_s \left(\tfrac{2}{3} L(As - As_{\min}) + L As_{\min}\right) \quad (۳۷)$$

تحت شرایط:



شکل (۵): تیر بتنی تحت قید لنگر خمشی و عرض مقطع

$$M_n \le A_S F_y \left(d - 0.59 \frac{A_S F_y}{b_w f_c}\right) \qquad \text{(۳۸-الف)}$$

یا

$$g_1 = 1 - x_1 F_y \left(x_3 - 0.59 \frac{x_1 F_y}{x_2 f_c}\right) / M_n \le 0 \qquad \text{(۳۸-ب)}$$

$$b_w \ge 25cm \quad \text{یا} \quad g_2 = 1 - \frac{x_2}{25} \le 0 \qquad \text{(۳۹)}$$

به‌منظور حل مسئله، حدس اولیه برای نقطه‌ی مرجع برابر $X^{(0)} = (15,30,30)$ انتخاب شده است. مطابق الگوریتم بهینه‌یابی، برای این تیر بتنی که دارای دو قید و سه متغیر می‌باشد نیز جداول نظیر مثال قبل تهیه شده است. در نقاط بر روی تابع هدف و قیدها که در جدول (۵) ارائه گردیده باید شعاع انحناء تعیین شود. بردار جهت شعاع انحناء برای گام اول به‌صورت اختیاری مطابق جدول (۶) انتخاب شده اما در گام‌های بعدی این بردار مطابق رابطه (۸) از دو نقطه‌ی مرجع متوالی محاسبه شده است. مقدار شعاع انحناء مطابق رابطه (۱۵) محاسبه و در جدول (۷) ارائه شده است.

همان‌طور که در جدول (۸) دیده می‌شود در گام بیست‌ونهم اندازه‌ی تغییرات نقطه‌ی مرجع به عدد ناچیزی رسیده است. همین‌طور فاصله‌ی نقطه‌ی مرجع از نقطه‌ی واقع بر روی هر دو قید نیز به‌مرور کم شده اما مقدار تابع هدف رفتاری زیگزاگی داشته و کاملاً کاهشی نیست بنابراین می‌توان گفت این وضعیت نشان از نزدیک شدن تدریجی نقطه‌ی بهینه در ناحیه‌ی موجه واقعی دارد که ممکن است نهایتاً مقدار تابع هدفی بزرگ‌تر از مقدار

جدول (۵): نقطه‌ی روی قید با کوتاه‌ترین فاصله از نقطه‌ی مرجع

X (نقطه روی دو قید)	X_1			X_2		
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}
گام ۱	۱۷/۸۷۰۵	۳۰/۲۷۱	۳۲/۱۵۵۱	۱۵/۰۰۰۰	۲۵/۰۰۰۰	۳۰/۰۰۰۰
گام ۲	۱۷/۸۷۲۵	۲۵/۹۷۱۹	۳۳/۰۴۳۱	۱۸/۱۱۳۹	۲۵/۰۰۰۰	۳۳/۲۳۱۴
گام ۳	۱۷/۵۴۹۹	۲۵/۰۰۰۷	۳۳/۴۶۰۲	۱۷/۵۴۶۸	۲۵/۰۰۰۰	۳۳/۴۵۷۹
گام ۴	۱۷/۶۲۵۳	۲۵/۰۰۰۰	۳۳/۳۶۰۰	۱۷/۶۲۵۳	۲۵/۰۰۰۰	۳۳/۳۶۰۰
گام ۲۹	۱۷/۵۹۴۱	۲۵/۰۰۰۰	۳۳/۴۲۹۵	۱۷/۵۹۲۲	۲۵/۰۰۰۰	۳۳/۴۲۹۵

جدول (۶): بردار مماسی تابع هدف و قیدها حاصل از ۲ نقطه‌ی متوالی مرجع

W (بردار مماسی)	W_1			W_2			W_f		
	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{f1}	w_{f2}	w_{f3}
گام ۱	۰/۳۲۹۹	-۰/۸۸۹۲	-۰/۳۱۶۹	-۰/۴۹۲۱	۰/۰	-۰/۸۷۰۶	۰/۶۸۶۲	-۰/۵۱۴۳	-۰/۵۱۴۴
گام ۲	۰/۰۲۶۸	-۰/۹۸۵۸	۰/۱۶۵۷	۰/۶۹۳۹	۰/۰	۰/۷۲۰۱	۰/۳۷۸۶	-۰/۸۲۳۵	۰/۴۲۲۵
گام ۳	-۰/۶۰۲۲	۰/۰۵۳۰	۰/۷۹۶۶	-۰/۹۲۸۶	۰/۰	۰/۳۷۱۰	-۰/۶۸۶۰	۰/۲۷۶۸	۰/۶۷۲۹
گام ۴	۰/۶۰۲۵	-۰/۰۰۴۹	-۰/۷۹۸۱	۰/۶۲۵۵	۰/۰	-۰/۷۸۰۲	۰/۵۸۶۷	-۰/۰۳۳۶	-۰/۸۰۹۱
گام ۲۹	۰/۵۹۹۹	-۰/۰۰۰۰	-۰/۸۰۰۱	۰/۵۹۹۹	۰/۰	-۰/۸۰۰۱	۰/۵۷۷۷	-۰/۰۱۸۲	-۰/۸۱۶۱

جدول (۷): شعاع انحناء و مرکز کره برای تابع هدف و قید

	R (شعاع انحناء)			X* (مختصات مرکز کره)								
				X^*_1			X^*_2			X^*_f		
	R_1	R_2	R_f	x^*_{11}	x^*_{12}	x^*_{13}	x^*_{21}	x^*_{22}	x^*_{23}	x^*_{f1}	x^*_{f2}	x^*_{f3}
گام ۱	۳۶/۳	۱۰۰۰	۲۵/۹۰۷۹	۴۶/۸	۳۳/۳	۵۳/۹	۱۵/۰	۱۰۲۵/۰	۳۰/۰	-۳/۸۴۶۳	۱۷/۴۲۹۱	۱۷/۴۲۹۷
گام ۲	۷۵/۳	۱۰۰۰	۳۵/۲۴۸۵	۷۶/۸	۳۴/۳	۷۹/۰	۱۸/۱	۱۰۲۵/۰	۳۳/۲	-۸/۹۰۷۷	۱۰/۳۵۰۴	۱۳/۱۲۴۸
گام ۳	۲۲/۲	۱۰۰۰	۳۰/۰۴۹۳	۳۵/۲	۳۴/۳	۴۶/۷	۱۷/۵	۱۰۲۵/۰	۳۳/۵	-۵/۶۳۰۷	۱۳/۳۹۶۵	۱۵/۷۹۹۳
گام ۴	۲۲/۵	۱۰۰۰	۳۵/۶۲۷۴	۳۵/۴	۲۷/۷	۴۶/۸	۱۷/۶	۱۰۲۵/۰	۳۳/۴	-۹/۴۱۰۳	۱۰/۲۹۲۴	۱۳/۱۱۶۲
گام ۲۹	۲۲/۵	۱۰۰۰	۳۶/۰۶۳۷	۳۵/۵	۲۷/۷	۴۶/۹	۱۷/۶	۱۰۲۵/۰	۳۳/۴	-۹/۷۳۳۳	۱۰/۰۵۸۲	۱۲/۹۳۵۹

جدول (۸): نتایج عددی تا گام محاسباتی ۴ و گام نهایی

گام‌ها		گام ۱	گام ۲	گام ۳	گام ۴	گام ۲۹
فاصله نقطه مرجع از قید	$\|\|l_1\|\|$	۵/۴۰۰۹	۰/۵۲۸۲	۰/۱۲۵۴	۰/۰۴۴۲	۸/۹۹۷۸–۴e
	$\|\|l_2\|\|$	۴/۴۸۷۶	۰/۶۱۰۷	۰/۱۲۵۴	۰/۰۴۴۲	۸/۹۹۷۸–۴e
ضریب لاگرانژ	μ_1	۰/۷۶۵۸	۰/۴۴۶۶	۱/۳۲۱۱	۱/۵۲۴۸	۱/۵۲۵۹
	μ_2	۰/۰۰۱۲	۰/۰۱۰۵	۰/۰۰۸۱	۰/۰۱۰۶	۰/۰۱۰۹
نقطه‌ی مرجع	x_1	۱۸/۱۱۳۹	۱۷/۵۴۶۸	۱۷/۶۲۵۳	۱۷/۵۹۸۷	۱۷/۵۹۴۶
	x_2	۲۵/۰۱۰۱	۲۵/۰۰۰۲	۲۵/۰۰۰۰	۲۵/۰۰۰۰	۲۵/۰۰۰۰
	x_3	۳۳/۲۳۱۴	۳۳/۴۵۷۹	۳۳/۳۶۰۰	۳۳/۳۹۵۴	۳۳/۴۲۸۸
تابع هدف	f	۸/۷۸۷۹e۶	۸/۵۶۷۶e۶	۸/۵۸۰۶e۶	۸/۵۷۶۸e۶	۸/۵۸۳۴e۶
اندازه تغییرات نقطه مرجع	$\|\|X^{(i-1)}-X^{(i)}\|\|$	۶/۷۱۱۰	۰/۶۱۰۸	۰/۱۲۵۴	۰/۰۴۴۲	۸/۹۹۷۸–۴e

محاسبه شده در گام‌های قبلی خود داشته باشد.

در بسیاری از مسائل مهندسی و به‌خصوص در مسائل سازه‌ای، حد بالا و پایین برای متغیرهای طراحی وجود دارد که معمولاً ناشی از ضوابط آیین‌نامه و یا محدودیت‌های اجرایی می‌باشد. قید دوم در مثال تیر بتنی از این دسته از محدودیت‌ها است. ازآنجاکه هر قید یک ضریب لاگرانژ به معادلات لاگرانژ اضافه می‌کند، برای حذف این نوع ضرایب می‌توان ابتدا تک متغیر طرح را از تساوی نامعادله‌ی مربوط به این‌گونه قیدها به‌طور مستقیم تعیین نمود و سپس با داشتن این متغیر طرح و با به‌کارگیری رابطه (۱۹)، ضرایب لاگرانژ نظیر این قیدها از بقیه‌ی ضرایب جدا شده و نهایتاً در رابطه (۲۱)، با بازنویسی این نوع ضرایب برحسب بقیه‌ی ضرایب لاگرانژ، دستگاه معادلات لاگرانژ اصلاح می‌شود. به‌طور خاص در مقاله‌ای دیگر، روابط مربوط به جدا شدن این ضرایب از دستگاه معادلات لاگرانژ ارائه خواهد شد.

۹- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک درون‌یابی به‌صورت کروی با تعریف جدیدی از شعاع انحناء در فضایی بزرگ‌تر از فضای هندسی برای تابع هدف و قیدها جهت استفاده در روش لاگرانژ ارائه شد. همچنین الگوریتمی برای نزدیک کردن جواب تقریبی به جواب دقیق ارائه شد. برخی نتایج به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

- یکی از مهم‌ترین دستاوردهای این روش مطابق رابطه (۱۹) جداسازی متغیرهای طراحی از دستگاه معادلات بهینه‌یابی می‌باشد. درحالی‌که در روش‌های مشابه مانند روش‌های متکی به بسط تیلور، تعداد مجهولات درگیر در حل مسئله برابر تعداد متغیرهای طراحی به‌علاوه‌ی تعداد قیدهای اصلی و اضافی مسئله می‌باشد.
- در این روش از برگرداندن نقطه‌ی مرجع بر روی قیدها با حداقل فاصله (مانده خطا) استفاده می‌شود. این در حالی است که روش‌هایی مانند روش‌های متکی به بسط تیلور، در هر گام محاسباتی برای تقریب زدن از روی هر قید، ذاتاً تأکیدی بر حداقل کردن مانده خطا ندارند.
- مثال‌های سازه‌ای خرپا و تیر نشان داد که جواب‌های حاصل از این روش با روش جریمه خارجی کاملاً یکسان می‌باشد.
- در مسائلی مانند مثال دوم (تیر) که تعداد متغیرهای طراحی از تعداد قیدها بیشتر است این روش می‌تواند کمک‌کننده باشد چراکه حجم اصلی محاسبات بر روی حل معادلات لاگرانژ بوده به‌طوری‌که تعداد مجهولات مستقل آن یعنی ضرایب لاگرانژ به تعداد قیدهای مسئله خواهد بود.
- با جداسازی متغیرها از معادلات لاگرانژ و کاهش محاسبات بهینه‌یابی امکان بهتری از طرح‌های بهینه لرزه‌ای مبتنی بر تحلیل‌های تاریخچه-زمانی فراهم خواهد شد.
- در مسائل واقعی مهندسی که امکان قیدهای مربوط به حد بالا

یا پایین متغیرها وجود داشته، به‌طوری که توضیح داده شد، ضرایب لاگرانژ این قیدها از دستگاه معادلات قابل حذف بوده و بار اضافی به معادلات تحمیل نمی‌کنند.

– این مقاله به بیان روش پیشنهادی و چگونگی روند حل مسائل بهینه‌یابی در قالب مثال‌های ساده پرداخت. لذا بررسی تفصیلی میزان دقت و سرعت همگرایی این روش در مقایسه با دیگر روش‌های کلاسیک و نوین به مقاله‌ی دیگری موکول می‌شود.

مراجع

1. Cheney, E.W. and Goldstein, A.A. (1959) Newton's method of convex programming and Tchebycheff approximation. *Numerische Mathematik*, **1**, 253-268.

2. Kolda, T.G., Lewis, R.M., and Torczon, V. (2003) Optimization by direct search: new perspectives on some classical and modern methods. *Journal of SIAM*, **45**(3), 385-482

3. Izmailov, A.F. and Kurennoy, A.S. (2013) Abstract newtonian frameworks and their applications. *SIAM J. Optim.*, **23**(4), 2369-2396.

4. Li, C. and Ng, K.F. (2013) Approximate solutions for abstract inequality systems. *SIAM J. Optim.*, **23**(2), 1237-1256.

5. Etman, L.F.P., Groenwold, A.A., and Rooda, J.E. (2012) First-order sequential convex programming using approximate diagonal QP subproblems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **45**, 479-488.

6. Wolf, P. (1959) The Simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, **27**(3), 382-398.

7. Curtis, F.E., Johnson, T.C., Robinson, D.P., and Wächter, A. (2014) An inexact sequential quadratic optimization algorithm for nonlinear optimization. *SIAM J. Optim.*, **24**(3), 1041-1074.

8. Park, S., Jeong, S. H.,Yoon,G.H., Groenwold, A.A., and Choi, D. (2014) A globally convergent sequential convex programming using an enhanced two-point diagonal quadratic approximation for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **50**, 739-753.

9. Groenwold1, A.A. and Etman, L.F.P. (2010) A quadratic approximation for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **82**(4), 505-524.

10. Zangwill, W.I. (1967) Nonlinear programming via penalty functions. *Management Science*, **13**(5), 344-358.

11. Mahini, M.R., Moharrami, H., and Cocchetti, G. (2014) Elastoplastic analysis of frames composed of softening materials by restricted basis linear programming. *Computers & Structures*, **131**, 98-108.

12. Groenwold, A.A., Wood, D.W., Etman, L.F.P., and Tosserams, S. (2009) Globally convergent optimization algorithm using conservative convex separable diagonal quadratic approximations. *AIAA Journal*, **47**(11), 2649-2657.

13. Groenwold, A.A. (2012) Positive definite separable quadratic programs for non-convex problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **46**(6), 795-802.

14. Burke, J.V., Curtis, F.E., and Wang, H. (2014) A sequential quadratic optimization algorithm with rapid infeasibility detection. *SIAM J. Optim.*, **24**(3), 1041-1074.

15. Rosen, J.B. (1960) The gradient projection method of nonlinear programming, Part I: linear constraints. *SIAM Journal*, **8**, 181-217.

16. Rosen, J.B. (1961) The gradient projection method for nonlinear programming, Part II: nonlinear constraints. *SIAM Journal*, **9**, 414-432.

17. Edwards Jr., C.H. (1973) *Advanced Calculus of Several Variables*. 15-16, Academic Press, New York and London.

18. Simon, L. (2008) *An Introduction to Multivariable Mathematics (Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics)*. Morgan, and Claypool, Florida.

19. Christensen, P.W. and Klarbring, A. (2009) An introduction to structural optimization. *Solid Mechanics and Its Applications*, **153**, Springer.

اصطلاحات فنی

۱- بهینه‌یابی مستقیم	Direct Method
۲- خطی‌سازی پیاپی	Sequential Linear Programming
۳- تکنیک سیمپلکس	Simplex Technique
۴- برنامه‌ریزی درجه دوم	Sequential Quadratic Programming
۵- ضرایب لاگرانژ	Lagrange Multipliers
۶- روش پنالتی	Penalty Method
۷- توابع کروی	Spherical Functions
۸- معادلات لاگرانژ	Lagrange Equations
۹- شعاع انحناء	Radius of Curvature
۱۰- نقطه مرجع	Reference Point
۱۱- ماتریس هسین	Hessin Matrix
۱۲- روش تندترین کاهش	Steepest Descent Method

Decoupling of Variables in Optimal Seismic Design Using Spherical Interpolation

Hossein Meshki[1] and Abdolreza Joghataie[2*]

1. Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2. Associate Professor, Sharif University of Technology, Tehran, Iran,
*Corresponding Author, email: joghatae@sharif.edu

In this paper, a method is presented based on approximating the objective function and constrains in optimization problems in conjunction with Lagrange multiplier method. Besides, an algorithm is developed in this relation. Instead of linear or parabola terms employed in Taylor expansion to proceed cautiously with short step lengths, in the method presented here, an arc with constant curvature is used that makes it possible to proceed with relatively longer step lengths. For an n-dimensional optimization problem, the spheres are n-dimensional too. The radius of curvature and center of spheres can be determined at the tangent point between each function and its corresponding sphere. For the objective function, the parameters of sphere are determined at the reference point obtained by Lagrange equations, but for the constraints, first the reference point is returned to the surface of all the active constraints, then at the points on the constraints, the approximate parameters are calculated. Hence every computational step includes two parts: the determination of the reference point and returning it to the surface of active constraints. The criterion for returning to the active constraint is based on the shortest distance of the reference point from each of the active constraint, because the reference point is the output of optimization represented by Lagrange equations and so is the basis of the calculations. For returning the reference point to the active constraint, only one scalar variable is involved in the calculations. The introduction of the n-dimensional spheres both reduces the number of and simplifies the form of equations that need to be solved simultaneously to determine the optimum point and Lagrange multipliers at each optimization step, because the unknowns are now the Lagrange multipliers. This results in a significant reduction in computation time. Separating the design variables from Lagrange equations, the time of calculations may be saved for the loops of time-history analysis in the optimal seismic design. The method is applied to the optimization of two major parts of the lateral resistance systems, and the results are compared with those from penalty method. Considerable reduction of solution time is observed.

Conclusions

The following remarks and conclusions are pertinent with regard to the formulation and the results presented in the paper:

(1) The structural examples solved by the method presented here have also been solved by the exterior penalty method where both methods have provided exactly the same optimum solutions.

(2) The proposed method does not depend on the convexity or the concavity of the constraints or the objective function, because the radius of sphere that indicates the curvature is directly utilized at each computational step.

(3) Similar to the other optimization methods, the convergence behaviour and success of the proposed method depends on the starting point.

(4) Separating the design variables from Lagrange equations, the time of calculations may be saved for the loops of time-history analysis in the optimal seismic design.

(5) In this method, the criterion for the returning to the active constraint was utilized that is based on the shortest distance of the reference point from each of the active constraint (residual error); however, the methods based on Taylor expansion do not consider the minimization of residual error in every computational step.

(6) Lagrange multipliers related to the constraints of lower and upper bound in the structural optimization problems can be decoupled from the others by the proposal method.

(7) Though of the time of computation to converge, the final solution is of great importance and should be discussed in detail. The space limitation does not let a proper comparison of convergence behaviour between the presented method and the exterior penalty method. Hence this issue has been postponed to a follow-up paper, but just qualitatively, the presented method has shown the convergence faster.

Keywords: N-Dimensional Sphere; Radius of Curvature; Reference Point; Lagrange Multipliers; Contrained Problems