تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۰۳
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۷

فصلنامه علمی علوم و مهندسی زلزله
سال نهم، شماره سوم، پاییز ۱۴۰۱

DOI: 10.48303/bese.2021.247215

نوع مقاله: پژوهشی

محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیرهای دو بعدی خمشی منشوری دارای جرم و الاستیسیته گسترده با استفاده از روشی ابتکاری

مسعود محمودآبادی (نویسنده مسئول)
استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران،
m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

سید محمدرضا حسنی
دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، مازندران، ایران

بابک تقوی
دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه قم، دانشکده فنی و مهندسی، قم، ایران

چکیده

در این مقاله، با روشی جدید و با رسم نمودار تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیرهای خمشی منشوری بر حسب پارامتری که متناسب با جذر فرکانس زاویه‌ای این سیستم‌هاست، فرکانس‌های طبیعی این تیرها شناسایی شده است. در این تحقیق، از توابع درون‌یابی جدیدی که متشکل از توابع مثلثاتی و نمایی است، به‌جای توابع درون‌یابی متعارف که شامل چند جمله‌ای‌های درجه سه می‌باشند، استفاده شده است. مقادیر آرگومان این توابع شامل پارامتری موسوم به بتا است که متناسب با جذر فرکانس زاویه‌ای تیر خمشی می‌باشد. با تغییر این پارامتر در محدوده‌ای مناسب و با گامی مشخص، فرکانس‌های تیر خمشی با محاسبه ماتریس‌های سختی و جرم و به ازای مقادیر مختلف بتا محاسبه شده و نمودار تغییرات فرکانس‌های تیر خمشی بر حسب بتاهای مختلف رسم می‌گردد. از دیدگاه اجزای محدود، این تیرها دارای درجه آزادی معینی هستند که به تعداد این درجات آزادی و به ازای یک بتا مشخص، می‌توان برای آنها فرکانس طبیعی ارتعاشی محاسبه نمود. با بررسی نمودارهای فرکانس‌های مختلف تیر خمشی مورد نظر بر حسب پارامتر بتا و نیز با داشتن فرکانس‌هایی تقریبی که با روش اجزای محدود متعارف به دست می‌آید و مقایسه آنها با یکدیگر، می‌توان فرکانس‌های تیر را با دقت بالاتری به دست آورد. در این مقاله، سه نوع تیر خمشی منشوری با شرایط تکیه‌گاهی مختلف به‌تفصیل مورد بررسی قرار گرفتند و فرکانس‌هایی که از این روش ابتکاری برای آنها به دست آمد در مقایسه با روش اجزای محدود متعارف دارای دقت بالاتری مخصوصاً برای مدهای ارتعاشی بالاتر بودند.

واژگان کلیدی: فرکانس‌های طبیعی، تیرهای خمشی منشوری، جزء محدود، توابع درون‌یابی، ماتریس‌های جرم و سختی.

۱- مقدمه

فرکانس ارتعاش آزاد سازه‌ها یکی از پارامترهای اساسی و مهم در ارتباط با چگونگی واکنش آنها به نیروی زلزله است. به‌عنوان‌مثال، یک سازه با سختی زیاد که دارای فرکانس بالایی می‌باشد، در مقایسه با سازه‌ای که دارای سختی کمی است و در نتیجه فرکانس ارتعاش آن پایین است، رفتار کاملاً متفاوتی در برابر یک زلزله مشخص خواهد داشت. معمولاً با مدل‌سازی سازه‌ها به روش اجزای محدود، فرکانس‌های ارتعاش آزاد آنها به‌صورت تحلیلی محاسبه می‌شود. علاوه بر این، موضوع محاسبه دقیق فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ارتعاشی متناظر با آنها برای سیستم‌های خمشی‌ای که دارای جرم و الاستیسیته گسترده هستند و احیاناً ترکیبی از چند تیر خمشی می‌باشند، بعضاً مستلزم حل معادلات پیچیده ریاضی می‌باشد و کار ریاضی نسبتاً سنگینی را طلب می‌کند. منظور از تیرهای خمشی، تیرهایی هستند که تغییرشکل‌های محوری آنها در مقایسه با تغییرشکل‌های خمشی آنها ناچیز است و در نتیجه، این اعضا از لحاظ محوری صلب فرض می‌شوند. با استفاده از روش اجزای محدود متعارف

می‌توان به‌طور تقریبی فرکانس‌های طبیعی این نوع تیرها را محاسبه کرد. با افزایش تعداد اجزای محدود به‌کار برده شده در مدل، خطای محاسبه فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. هرگاه از ماتریس جرم سازگار استفاده شود مقادیر فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود با مقادیری بزرگ‌تر به مقادیر دقیق فرکانس همگرا می‌شوند، در حالی که اگر از ماتریس جرم متمرکز استفاده شود مقادیر فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود با مقادیری کوچک‌تر به مقادیر دقیق فرکانس همگرا می‌گردند [1]. توابع درون‌یابی (توابع شکل) که برای این اجزای محدود خمشی استفاده می‌شود توابع چند جمله‌ای درجه سه هستند [1]. ایده جدیدی که به نظر مؤلفان این مقاله رسیده است، این است که به‌جای استفاده از توابع درون‌یابی چند جمله‌ای، از توابع درون‌یابی مثلثاتی و نمایی برای محاسبه ماتریس سختی و ماتریس جرم جزء محدود استفاده شود. در حقیقت، این توابع مثلثاتی و نمایی، جواب‌های معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای خمشی دارای جرم و الاستیسیته گسترده می‌باشند [1]. آرگومان این توابع مثلثاتی و نمایی شامل پارامتری موسوم به β می‌باشد که با تغییر این پارامتر در محدوده‌ای مناسب و با گامی مشخص، می‌توان تغییرات فرکانس‌های مختلف تیر خمشی منشوری مورد مطالعه را بر حسب β رسم نمود.

بانرجی [2] یک نظریه عمومی برای محاسبه ماتریس سختی دینامیکی اعضای سازه‌ای را ارائه نموده است. او اذعان داشته است که اگر عبارات صریح تحلیلی برای عناصر ماتریس سختی دینامیکی به‌جای روش‌های عددی استفاده شود، می‌تواند منجر به صرفه‌جویی قابل‌توجهی در زمان کامپیوتر گردد. چنین عباراتی را می‌توان با استفاده از محاسبات نمادین به دست آورد. او کاربرد ماتریس سختی دینامیکی را برای محاسبه فرکانس‌های یک سازه مورد بحث و بررسی قرار داده است. روش ارائه شده توسط او کلی می‌باشد و شامل هیچ مثالی نیست. ژنگ [3-4] یک نوع روش جدید عددی برای تحلیل ارتعاشی سازه‌ها ارائه نموده است. او این روش را روش جزء محدود ترکیبی نامیده است. در حقیقت، او روش جزء محدود متعارف را با نظریه تحلیل کلاسیک ارتعاشات ترکیب نموده است با این هدف که هم تطبیق‌پذیری روش اجزای محدود متعارف و هم فرم بسته بودن نظریه کلاسیک ارتعاشات مورد استفاده قرار گیرد. او دو نوع سیستم مختصات برای بیان میدان جابه‌جایی جزء محدود مجزا شده ارائه نمود. دسته اول مختصات، تغییر مکان گرهی را شامل می‌شد و دسته دوم مختصات، درجه آزادی میدانی جزء محدود بود. هدف از تغییر مکان گره‌ای این بود که تطبیق‌پذیری روش اجزای محدود متعارف به‌کار گرفته شود و هدف درجه آزادی میدانی این بود که میزان دقت بالا رود. او این دو دسته مختصات را با استفاده از اصل رایلی- ریتز با یکدیگر ترکیب نمود. ژنگ [3-4] مثال‌های متعددی را که شامل محاسبه‌های فرکانس‌های طبیعی میله‌ای و اعضای خمشی منشوری بود، مورد بررسی قرار داد و میزان کارایی روش خود را ارزیابی نمود.

در روش اجزای محدود متعارف برای مدل کردن تیرهای خمشی منشوری جهت محاسبه فرکانس‌های ارتعاش آزاد آنها از توابع شکل چندجمله‌ای درجه سه استفاده می‌شود. در این مدل‌سازی هر گره دارای دو درجه آزادی است. یک درجه آزادی گره، درجه آزادی انتقالی است که تغییر مکان عمود بر محور تیر را نشان می‌دهد و درجه آزادی دیگر، درجه آزادی دورانی است. برای افزایش دقت محاسبه فرکانس‌های ارتعاش تیر، لازم است که تعداد اجزای محدود خمشی به‌کار گرفته در مدل‌سازی افزایش یابد؛ اما نکته‌ای که وجود دارد این است که با افزایش تعداد اجزای محدود خمشی دقت محاسبه فرکانس‌های مدهای پایین تیر افزایش می‌یابد، اما فرکانس‌های محاسبه شده مدهای بالا دارای خطای زیادی هستند. به‌عنوان‌مثال، اگر تیر خمشی منشوری مدل‌سازی شده به روش اجزای محدود دارای ۱۰ درجه آزادی فعال باشد، خطای نسبی فرکانس‌های مدهای ارتعاشی اول و دوم به دست آمده از روش اجزای محدود نسبت به مقادیر دقیق متناظرشان ناچیز است، اما خطای نسبی فرکانس‌های مدهای نهم و دهم زیاد خواهد بود. در این پژوهش، از توابع شکل مثلثاتی و نمایی به‌جای توابع شکل چند جمله‌ای استفاده شده است.

آرگومان این توابع شامل پارامتری موسوم به β است. این پارامتر متناسب با جذر فرکانس زاویه‌ای تیر خمشی است و توسط رابطه (۹) تعریف گردیده است. با تغییر این پارامتر در محدوده‌ای مناسب و با گامی مشخص، می‌توان تغییرات فرکانس‌های مختلف تیر خمشی مورد مطالعه را بر حسب β رسم نمود. با بررسی نمودارهای فرکانس‌های مختلف تیر بر حسب β و نیز با داشتن فرکانس‌های تقریبی‌ای که با روش اجزای محدود متعارف به دست می‌آید و مقایسه آنها با یکدیگر می‌توان فرکانس‌های تیر را با دقت بالاتری به دست آورد. این روش مکمل روش اجزای محدود متعارف است و می‌تواند منجر به شناسایی دقیق‌تر فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود متعارف (مخصوصاً فرکانس‌های مدهای ارتعاشی بالای تیر) گردد. در این روش از حداقل جزء محدود ممکن استفاده می‌شود. به‌عنوان‌مثال، برای یک تیر خمشی منشوری طره‌ای، می‌توان با استفاده از فقط یک جزء خمشی، ۱۰ فرکانس ارتعاش آزاد آن را با دقت خیلی خوبی محاسبه کرد.

در بخش‌های بعدی مقاله، ابتدا حل تحلیلی معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای منشوری خمشی دارای جرم و سختی گسترده توضیح داده می‌شود. سپس توابع درون‌یابی درجه سوم که در روش اجزای محدود متعارف مورد استفاده قرار می‌گیرند، شرح داده می‌شوند و به دنبال آن توابع درون‌یابی پیشنهاد شده در این مقاله معرفی می‌گردند. در آخر، روش ابتکاری ارائه شده در این مقاله برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی سه نوع تیر منشوری به‌تفصیل توضیح داده خواهد شد و نتیجه‌گیری‌های لازم گرفته خواهد شد.

۲- بررسی سیستم‌های دارای جرم و الاستیسیته‌ی گسترده

۲-۱- معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای خمشی دارای جرم و سختی گسترده

در شکل (۱) یک تیر خمشی تحت بارگذاری دینامیکی نشان داده شده است. بارگذاری $p(x,t)$ وارده نسبت به مکان و زمان تغییر می‌کند.

با توجه به اینکه، تیر دارای بی‌نهایت درجه آزادی است، در نتیجه، بی‌نهایت فرکانس طبیعی ω و شکل مد ارتعاشی $\varphi(x)$ را می‌توان برای آن متصور شد. برای حالت خاص یک تیر یکنواخت که $EI(x) = EI$ و $m(x) = m$ باشد، معادله (۱) حاصل خواهد شد:

$$EI\varphi^{IV}(x) - \omega^2 m\varphi(x) = 0 \qquad (۱)$$

$$\varphi^{IV}(x) - \beta^4\varphi(x) = 0 \qquad (۲)$$

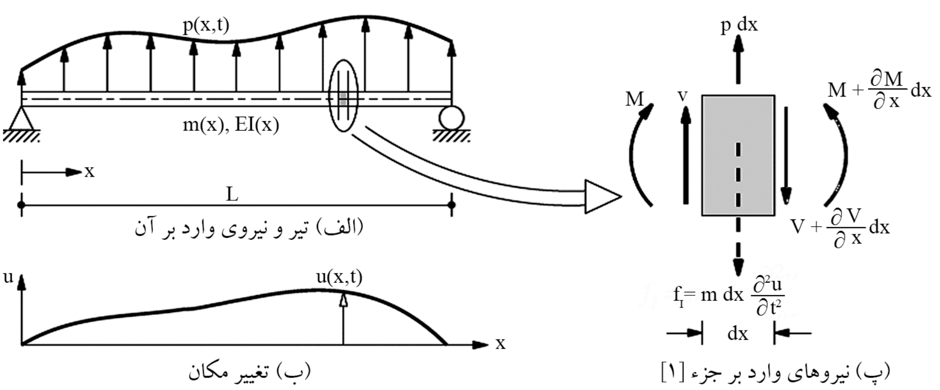
که

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \qquad (۳)$$

می‌باشد. جواب عمومی معادله (۲) عبارت است از [۱]:

$$\varphi(x) = C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x + C_3 e^{\beta x} + C_4 e^{-\beta x} \qquad (۴)$$

این جواب شامل پارامتر β و چهار ضریب ثابت C_1، C_2، C_3 و C_4 که در معادله‌ی (۴) مجهول هستند، می‌باشد. با اعمال چهار شرط مرزی برای یک تیر یک دهانه (دو شرط در هر انتهای تیر) چهار معادله برحسب ضرایب مجهول C_1، C_2، C_3 و C_4 به دست می‌آید که مقادیر ثابت این معادلات برابر صفر می‌باشد. با نوشتن این چهار معادله به‌صورت ماتریسی و با صفر قرار دادن دترمینان



شکل (۱): سیستم با جرم و الاستیسیته گسترده.

ماتریس ضرایب مجهول C_1، C_2، C_3 و C_4 که یک ماتریس چهار در چهار است، معادله‌ی مشخصه‌ی فرکانس تیر به دست می‌آید. معادله‌ی مشخصه‌ی فرکانس معمولاً یک معادله‌ی جبری-مثلثاتی است که ریشه‌های آن با روش‌های عددی به دست آورده می‌شوند و پارامتر βn که مطابق با رابطه‌ی (۳)، متناسب با جذر ω_n تیر مورد نظر است حاصل می‌گردد. با جایگذاری βn در ماتریس ضرایب، سه ضریب C_1، C_2 و C_3 برحسب ضریب C_4 به دست می‌آیند و شکل مد ارتعاشی iام تیر نیز مشخص می‌گردد. بدیهی است ضریب C_4 شامل هر عددی غیر از صفر می‌باشد. در روابط ارائه شده شرایط مرزی مکانی تیر مورد نظر بر اساس شرایط تکیه‌گاهی و شرایط مرزی زمانی تیر مورد نظر نیز بر اساس شرایط بارگذاری آن تعیین می‌گردد. به‌عنوان‌مثال، برای تیر دو سر ساده نشان داده شده در شکل (۱)، شرایط مرزی مکانی در این تیر بر اساس $x = 0$ و $x = L$، در نظر گرفته شده است. همچنین شرایط مرزی زمانی نیز به‌گونه‌ای است که تغییر مکان و لنگر خمشی به ازای تمامی زمان‌ها در دو انتهای تیر برابر صفر است که بر این اساس و با اعمال شروط تکیه‌گاهی منجر به چهار معادله $\varphi(0) = 0$، $\varphi''(0) = 0$، $\varphi(L) = 0$ و $\varphi''(L) = 0$ می‌گردد. برای این تیر دو سر ساده، معادله‌ی مشخصه‌ی فرکانس برابر با $C_1 \sin \beta L = 0$ به دست می‌آید که با استفاده از این رابطه فرکانس‌های ارتعاشی طبیعی آن به‌صورت $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\omega_n = n^2\pi^2/L^2 \sqrt{EI/m}$ به‌دست می‌آید. نکته قابل ذکر این است که مؤلفان این مقاله، تابع درون‌یابی‌ای به‌صورت ابتکاری در نظر گرفته‌اند که این موضوع در بخش ۳ به‌تفصیل شرح داده خواهد شد.

۲-۲- درجات آزادی جزء محدود تیر خمشی و توابع درون‌یابی مربوط به آن

مطالب این بخش از مراجع [۱، ۵-۶] اخذ گردیده است. یک جزء محدود تیرخمشی مستقیم به طول L، جرم بر واحد طول $m(x)$ و سختی خمشی $EI(x)$ مطابق شکل (۲) مفروض است. u_1 و u_3 تغییر مکان‌های عرضی دو گره انتهایی جزء محدود خمشی است و u_2 و u_4 دوران‌های دو گره انتهایی جزء محدود می‌باشد. این درجات آزادی در شکل (۲-الف) نشان داده شده است.

تغییر مکان هر نقطه دلخواه از این جزء محدود توسط رابطه زیر به چهار درجه آزادی آن مربوط می‌گردد:

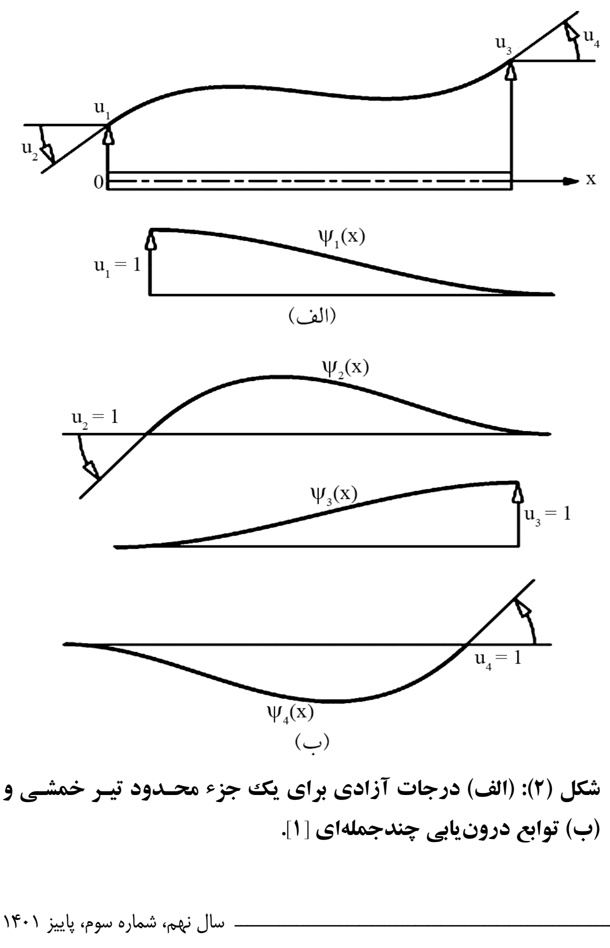
$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{4} u_i(t)\psi_i(x) \qquad (۵)$$

که تابع $\psi_i(x)$ عبارت است از تغییر مکان ناشی از تغییر مکان واحد u_i جزء محدود، وقتی سایر درجات آزادی آن بسته باشد. در نتیجه، $\psi_i(x)$ در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}
i=1:&\quad \psi_1(0)=1, \quad \psi_1'(0)=\psi_1(L)=\psi_1'(L)=0\\
i=2:&\quad \psi_2'(0)=1, \quad \psi_2(0)=\psi_2(L)=\psi_2'(L)=0\\
i=3:&\quad \psi_3(L)=1, \quad \psi_3(0)=\psi_3'(0)=\psi_3'(L)=0\\
i=4:&\quad \psi_4'(L)=1, \quad \psi_4(0)=\psi_4'(0)=\psi_4(L)=0
\end{aligned} \qquad (۶)$$

توابع درون‌یابی می‌توانند هر شکل دلخواهی را داشته باشند، اما باید شرایط مرزی را اقناع نمایند. هرگاه توابع درون‌یابی به‌صورت زیر، به شکل یک چند جمله‌ای مکعبی در نظر گرفته شوند:

$$\psi_i(x) = a_1 + a_2\left(\frac{x}{L}\right) + a_3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + a_4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad (۷)$$



شکل (۲): (الف) درجات آزادی برای یک جزء محدود تیر خمشی و (ب) توابع درون‌یابی چندجمله‌ای [۱].

ثابت‌های a_i را می‌توان برای هر یک از چهار مجموعه شرایط مرزی معادله (۶) تعیین کرد تا توابع درون‌یابی زیر به دست آیند:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= 1-3\left(\frac{x}{L}\right)^2+2\left(\frac{x}{L}\right)^3\\
\psi_2(x) &= L\left(\frac{x}{L}\right)-2L\left(\frac{x}{L}\right)^2+L\left(\frac{x}{L}\right)^3\\
\psi_3(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\\
\psi_4(x) &= -L\left(\frac{x}{L}\right)^2+L\left(\frac{x}{L}\right)^3
\end{aligned} \qquad (۸)$$

توابع درون‌یابی فوق در شکل (۲-ب) رسم گردیده‌اند.

۲-۳- ماتریس سختی و ماتریس جرم جزء محدود تیر خمشی

یک جزء محدود تیر خمشی مستقیم به طول L و سختی خمشی $EI(x)$ مطابق شکل (۱) در نظر گرفته شده است. با استفاده از اصل تغییر مکان مجازی، معادله زیر برای k_{ij} به‌دست می‌آید:

$$k_{ij}=\int_0^L EI(x)\psi_i''(x)\psi_j''(x)d \qquad (۹)$$

برای یک جزء محدود خمشی یکنواخت با $EI(x)=EI$ انتگرال معادله (۹) را می‌توان به‌صورت تحلیلی به دست آورد. با محاسبه این انتگرال برای $i,j=1,2,3,4$ ماتریس سختی جزء محدود به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\bar{k}_e=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

این ماتریس سختی برای یک جزء محدود خمشی یکنواخت بدون در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی می‌باشد.

مشابه درایه‌های ماتریس سختی، با استفاده از اصل تغییر مکان مجازی، ثابت می‌گردد که درایه‌های ماتریس جرم با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$m_{ij}=\int_0^L m(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx \qquad (۱۱)$$

اگر در معادله (۱۱) برای به دست آوردن درایه‌های ماتریس جرم از همان توابع درون‌یابی‌ای استفاده شود که با آنها درایه‌های ماتریس سختی به دست آورده شده‌اند، ماتریس حاصله را ماتریس جرم سازگار می‌نامند. برای یک جزء محدود با جرم یکنواخت $m(x)=m$، انتگرال‌های مربوط به رابطه (۱۱) را می‌توان به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد. بدین‌ترتیب، ماتریس جرم سازگار جزء محدود به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\bar{m}_e=\frac{mL}{420}\begin{bmatrix}156 & 22L & 54 & -13L\\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2\\ 54 & 13L & 156 & -22L\\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2\end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

۳- معرفی توابع درون‌یابی پیشنهادی

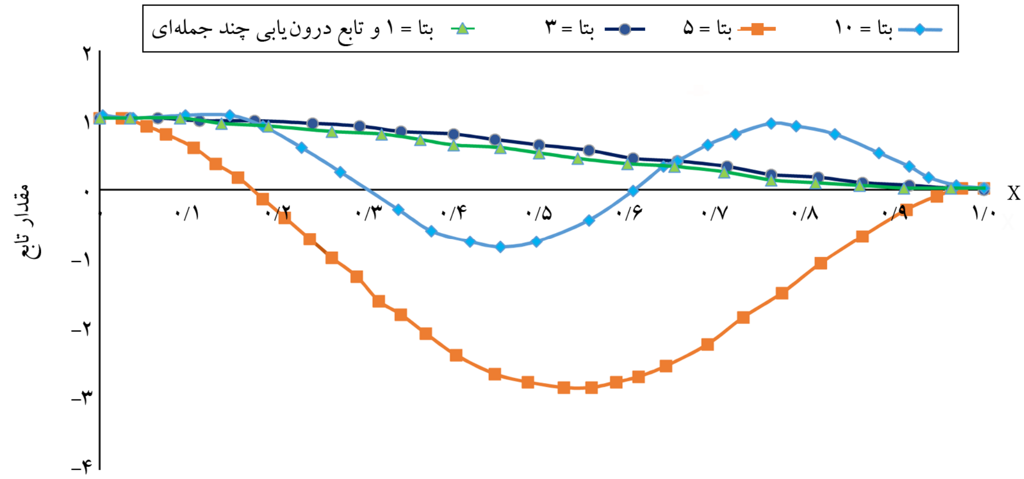
توابع درون‌یابی‌ای که توسط مؤلفان این مقاله پیشنهاد گردیده‌اند به شکل رابطه زیر می‌باشند. همان‌طور که در ابتدای بخش مقدمه ذکر گردیده است علت استفاده از این توابع این است که اینها جواب‌های معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای خمشی منشوری دارای جرم و الاستیسیته گسترده هستند:

$$\begin{aligned}
i=1:&\ \psi_1(0)=1,\ \psi_1'(0)=\psi_1(L)=\psi_1'(L)=0\\
i=2:&\ \psi_2'(0)=1,\ \psi_2(0)=\psi_2(L)=\psi_2'(L)=0\\
i=3:&\ \psi_3(L)=1,\ \psi_3(0)=\psi_3'(0)=\psi_3'(L)=0\\
i=4:&\ \psi_4'(L)=1,\ \psi_4(0)=\psi_4'(0)=\psi_4(L)=0
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

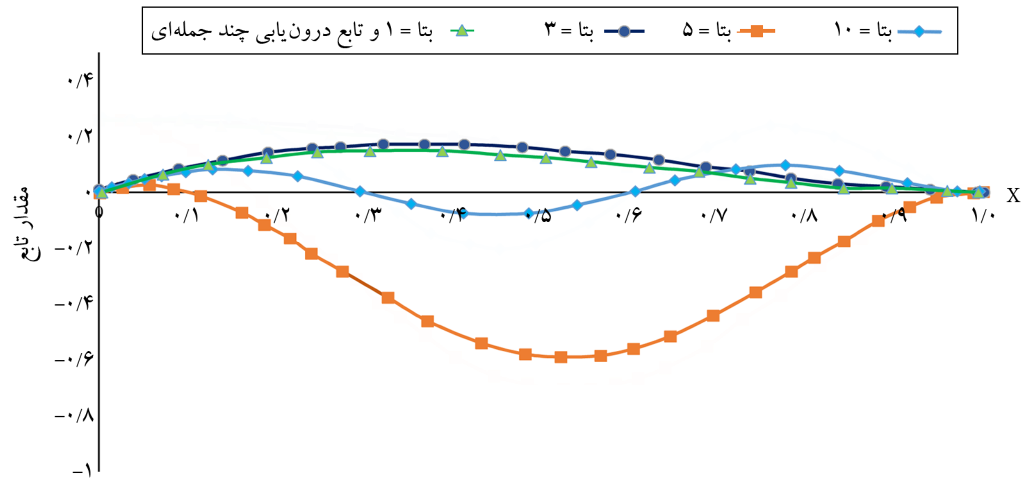
ملاحظه می‌گردد این توابع درون‌یابی از مجموع توابع مثلثاتی و نمایی تشکیل شده‌اند و دارای چهار ضریب ثابت C_1، C_2، C_3 و C_4 می‌باشند. علاوه بر این، آرگومان این توابع شامل پارامتر β است که با مشخص بودن این پارامتر، می‌توان ω^2 را با استفاده از رابطه‌ی (۳) به‌دست آورد.

در شکل‌های (۳) تا (۶) به‌ترتیب توابع پیشنهادی $\psi_1(x)$، $\psi_2(x)$، $\psi_3(x)$ و $\psi_4(x)$ به ازای مقادیر ۱، ۳، ۵ و ۱۰ برای β رسم گردیده‌اند. طول جزء محدود برابر واحد فرض گردیده است. همچنین، در این شکل‌ها، توابع درون‌یابی چند جمله‌ای متناظرشان نیز جهت مقایسه رسم شده‌اند. مشاهده می‌گردد به ازای β برابر با یک، تفاوت چندانی بین توابع درون‌یابی پیشنهادی و توابع درون‌یابی چند جمله‌ای وجود ندارد و عملاً این دو تابع بر هم منطبق هستند؛ اما با افزایش مقدار β، اختلاف بین این دو تابع زیاد می‌گردد و توابع درون‌یابی پیشنهادی به‌صورت موجدار درمی‌آیند.

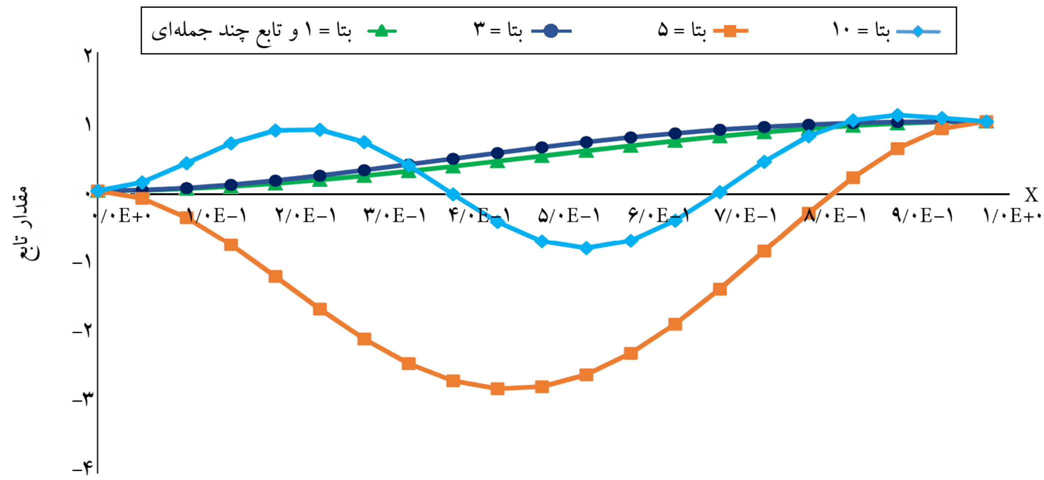
با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۷)، ماتریس‌های سختی و جرم به ازای مقادیر ۱، ۳، ۵ و ۱۰ برای β محاسبه شده‌اند. در این محاسبات، سختی خمشی EI و جرم واحد طول m یک فرض شده و طول جزء محدود نیز برابر با واحد در نظر گرفته شده است.



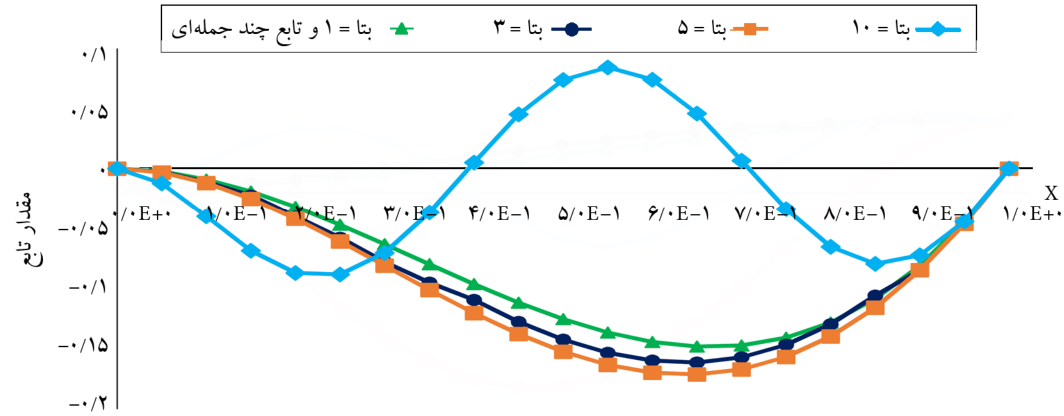
شکل (۳): نمودار تابع درون‌یابی پیشنهادی $\psi_1(x)$ به ازای βهای مختلف به همراه نمودار تابع درون‌یابی چندجمله‌ای متناظر با آن.



شکل (۴): نمودار تابع درون‌یابی پیشنهادی $\psi_2(x)$ به ازای βهای مختلف به همراه نمودار تابع درون‌یابی چندجمله‌ای متناظر با آن.



شکل (۵): نمودار تابع درون‌یابی پیشنهادی $\psi_3(x)$ به ازای βهای مختلف به همراه نمودار تابع درون‌یابی چندجمله‌ای متناظر با آن.



شکل (۶): نمودار تابع درون‌یابی پیشنهادی $\psi_4(x)$ به ازای βهای مختلف به همراه نمودار تابع درون‌یابی چندجمله‌ای متناظر با آن.

جدول (۱): مقادیر درایه‌های ماتریس سختی جزء محدود تیر خمشی به ازای مقادیر مختلف β به همراه درایه‌های متناظر ماتریس سختی به‌دست‌آمده از توابع شکل چندجمله‌ای.

β	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	K_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{33}	k_{34}	k_{44}
۱	۱۲/۰	۶/۰	−۱۲/۰	۶/۰	۴/۰	−۶/۰	۲/۰	۱۲/۰	−۶/۰	۴/۰
۳	۱۵/۴	۶/۷	−۸/۹	۵/۳	۴/۲	−۵/۳	۱/۹	۱۵/۴	−۶/۷	۴/۲
۵	۲۲۰۲/۲	۴۷۶/۳	۲۱۵۸/۶	−۴۶۱/۸	۱۰۵/۱	۴۶۱/۸	−۹۸/۸	۲۲۰۲/۲	−۴۷۶/۳	۱۰۵/۱
۱۰	۳۱۳۸/۷	۳۲۲/۶	۱۶۳۳/۶	−۱۳۳/۶	۳۸/۱	۱۳۳/۶	−۱۰/۴	۳۱۳۸/۷	−۳۲۲/۶	۳۸/۱
توابع شکل چندجمله‌ای	۱۲	۶	−۱۲	۶	۴	−۶	۲	۴	−۶	۴

جدول (۲): مقادیر درایه‌های ماتریس جرم جزء محدود تیر خمشی به ازای مقادیر مختلف β به همراه درایه‌های متناظر ماتریس سختی به‌دست‌آمده از توابع شکل چندجمله‌ای.

β	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{22}	m_{23}	m_{24}	m_{33}	m_{34}	m_{44}
۱	۱۵۶/۳	۲۲/۱	۵۴/۳	−۱۳/۱	۴/۰	۱۳/۱	−۳/۰	۱۶۵/۳	−۲۲/۱	۴/۰
۳	۱۸۸/۱	۲۸/۸	۸۳/۶	−۱۹/۵	۵/۴	۱۹/۵	−۴/۴	۱۸۸/۱	−۲۸/۸	۵/۴
۵	۱۲۶۹/۹	۲۶۰/۴	۱۱۴۳/۷	−۲۴۸/۴	۵۵/۲	۲۴۸/۴	−۵۳/۸	۱۲۶۹/۹	−۲۶۰/۴	۵۵/۲
۱۰	۲۰۱/۰	۱۶/۳	۱۱۸/۷	−۱۰/۶	۱/۵	۱۰/۶	−۰/۹	۲۰۱/۰	−۱۶/۳	۱/۵
توابع شکل چندجمله‌ای	۱۵۶	۲۲	۵۴	−۱۳	۴	۱۳	−۳	۱۵۶	−۲۲	۴

* توجه: همه اعداد جدول (۲) باید تقسیم بر عدد ۴۲۰ شوند.

نتایج حاصله به‌ترتیب در جداول (۱) و (۲) برای ماتریس‌های جرم و سختی آورده شده است. با دقت در این جداول، مشاهده می‌گردد ماتریس‌های جرم و سختی به‌دست‌آمده به ازای $\beta = 1$ عملاً با ماتریس‌های به‌دست‌آمده با استفاده از توابع درون‌یابی متعارف که توسط روابط (۱۶) و (۱۸) ارائه گردیده‌اند، یکسان هستند. با داشتن ماتریس‌های سختی و جرم جزء محدود، می‌توان مقادیر ویژه مربوط به این ماتریس‌ها را محاسبه کرد که این مقادیر ویژه برابر با مجذور فرکانس‌های زاویه‌ای هستند. جزئیات کار در بخش بعدی به‌تفصیل شرح داده شده است.

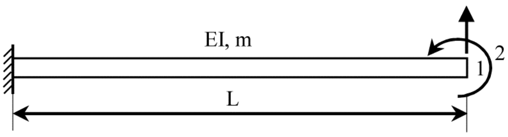
۴- تیرهای خمشی مورد بررسی

در این بخش از مقاله، سه تیر منشوری یک دهانه با شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا، با استفاده از روش تحلیلی، فرکانس‌های دقیق این تیرها محاسبه شده است. سپس، با استفاده از روش اجزای محدود متعارف، فرکانس‌های تقریبی آنها به دست آمده است. در آخر با روش ابتکاری ارائه

شده در این مقاله، فرکانس‌های طبیعی این تیرها شناسایی شده است و با مقادیر دقیق و تقریبی متناظرشان مقایسه گردیده‌اند.

۴-۱- تیر طره‌ای یکنواخت

تیر طره‌ای یکنواخت نشان داده شده در شکل (۷) مفروض است. این تیر دارای سختی خمشی EI، جرم واحد طول m و نیز طول L می‌باشد. در مرجع [۱] معادله مشخصه فرکانسی این سیستم که برابر با $1+\cos\beta L\cosh\beta L=0$ است، به دست آورده شده است که در آن $\beta=\sqrt[4]{\omega^2 m/EI}$ می‌باشد. با استفاده از نرم‌افزار MATLAB [۷]، دوازده ریشه معادله مشخصه فرکانسی این مدل به دست آورده شد که مقادیر آن در جدول (۳) آورده شده است. همچنین، با فرض اینکه طول تیر و نیز جرم واحد طول آن و همچنین، EI آن برابر واحد باشد، مقدار فرکانس زاویه‌ای تیر (ω) طبق رابطه $\omega=\sqrt{\beta^4 EI/m}$، برابر مجذور β می‌گردد که این کمیّت نیز محاسبه شده است و در جدول (۳) آورده شده است.



شکل (۷): مدل تیر طره‌ای با سختی و جرم یکنواخت.

در جدول (۴) ده فرکانس طبیعی این مدل که با استفاده از روش اجزای محدود متعارف به دست آمده با فرکانس‌های دقیق این مدل مقایسه شده است. این جدول عیناً از مرجع [۱] اخذ گردیده است. در روش اجزای محدود از توابع شکل معمولی و متعارف چند جمله‌ای استفاده می‌شود. با دقت در این جدول، مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد جزءهای محدود، دقت شناسایی فرکانس‌ها مخصوصاً فرکانس‌های مدهای پایین افزایش می‌یابد.

جدول (۳): ریشه‌های معادله مشخصه فرکانسی و فرکانس‌های زاویه‌ای تیر طره‌ای با سختی و جرم یکنواخت.

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ریشه	۱/۸۷۵۱	۴/۶۹۴۱	۷/۸۵۳۲	۱۰/۹۹۵۶	۱۴/۱۳۷۲	۱۷/۲۷۸۸
فرکانس زاویه‌ای	۳/۵۱۶۰	۲۲/۰۳۴۵	۶۱/۶۷۲۸	۱۲۰/۹۰۳۴	۱۹۹/۸۵۹۴	۲۹۸/۵۵۵۵
شماره	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
ریشه	۲۰/۴۲۰۴	۲۳/۵۶۱۹	۲۶/۷۰۳۵	۲۹/۸۴۵۱	۳۲/۹۸۷	۳۶/۱۲۸۰
فرکانس زاویه‌ای	۴۱۶/۹۹۰۸	۵۵۵/۱۶۵۲	۷۱۳/۰۷۸۹	۸۹۰/۸۳۱۸	۱۰۸۸/۱۲۴	۱۳۰۵/۲۵۵۰

جدول (۴): مقایسه فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود متعارف با فرکانس‌های دقیق تیر طره‌ای یکنواخت [۱].

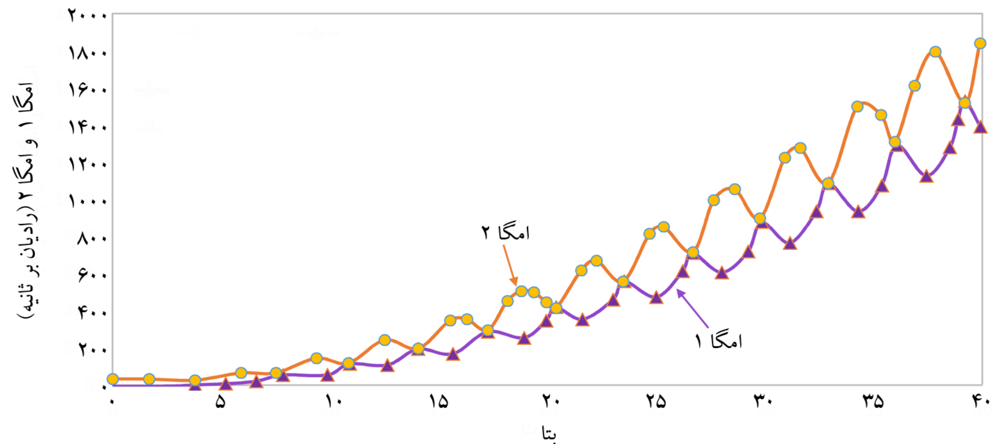
شماره مود	تعداد اجزای محدود (N_e)					فرکانس‌های دقیق
	۱	۲	۳	۴	۵	
۱	۳/۵۳۲۷۳	۳/۵۱۷۷۲	۳/۵۱۶۳۷	۳/۵۱۶۱۳	۳/۵۱۶۰۶	۳/۵۱۶۰۲
۲	۳۴/۸۰۶۹	۲۲/۲۲۱۵	۲۲/۱۰۶۹	۲۲/۰۶۰۲	۲۲/۰۴۵۵	۲۲/۰۳۴۵
۳	--------	۷۵/۱۵۷۱	۶۲/۴۶۵۹	۶۲/۱۷۴۹	۶۱/۹۱۸۸	۶۱/۶۹۷۲
۴	--------	۲۱۸/۱۳۸۰	۱۴۰/۶۷۱	۱۲۲/۶۵۷	۱۲۲/۳۲۰	۱۲۰/۹۰۲
۵	--------	--------	۲۶۴/۷۴۳	۲۲۸/۱۳۷	۲۰۳/۰۲۰	۱۹۹/۸۶۰
۶	--------	--------	۵۲۷/۷۹۶	۳۶۶/۳۹۰	۳۳۷/۲۷۳	۲۹۸/۵۵۶
۷	--------	--------	--------	۵۸۰/۸۴۹	۴۹۳/۲۶۴	۴۱۶/۹۹۱
۸	--------	--------	--------	۹۵۳/۰۵۱	۷۱۵/۳۴۱	۵۵۵/۱۶۵
۹	--------	--------	--------	--------	۱۰۱۶/۲۰	۷۱۳/۰۷۹
۱۰	--------	--------	--------	--------	۱۴۹۴/۸۸	۸۹۰/۷۳۲

نکته دیگر این است که فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود همواره بزرگ‌تر از فرکانس‌های دقیق مدل هستند. در حالتی که تعداد اجزای محدود برابر ۵ می‌باشد خطای فرکانس‌های حاصل از روش اجزای محدود نسبت به فرکانس‌های دقیق متناظرشان به‌ترتیب شماره مد مقادیر ۰/۰۰۱، ۰/۰۵، ۰/۳۶، ۱/۱۷، ۱/۵۸، ۱۲/۹۷، ۱۸/۲۹، ۲۸/۸۵، ۴۲/۵۱ و ۶۷/۸۳ درصد است. مشاهده می‌شود خطای فرکانس‌های حاصل از روش اجزای محدود برای مد ششم و بالاتر از آن، بیشتر از ۱۰ درصد است و بیشترین خطا مربوط به فرکانس مد دهم است که برابر ۶۷/۸۳ درصد می‌باشد.

در روش ابتکاری مطرح شده در این مقاله، تیر طره‌ای یکنواخت مورد بحث با یک جزء محدود مدل گردید و مطابق شکل (۷) برای آن یک درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی دورانی در نظر گرفته شد. با استفاده از توابع درون‌یابی جدیدی که در بخش قبل معرفی گردید، ماتریس‌های سختی و جرم این تیر به ازای βهای مختلف محاسبه شد و با توجه به اینکه از دیدگاه اجزای محدود، این مدل دارای دو درجه آزادی فعال است، در نتیجه، با حذف درجات آزادی غیرفعال، ماتریس‌های سختی و جرم ۲×۲ به ازای هر β مشخص به دست آمد. با داشتن این ماتریس‌ها، فرکانس‌های اول و دوم این تیر به ازای βهای مختلف محاسبه گردید. در شکل (۸) نمودار تغییرات فرکانس اول و دوم این سیستم به ازای تغییر β از ۰/۱ تا ۴۰ با افزایش ۰/۰۰۱ رسم گردیده است.

نمودار فرکانس اول (ω_1) دارای مینیمم مطلقی برابر با ۳/۵۱۶۰ رادیان بر ثانیه است که این عدد تا چهار رقم اعشار برابر با فرکانس دقیق مد اول این سیستم می‌باشد. به‌طور مشابه، نمودار فرکانس دوم (ω_2) دارای مینیمم مطلقی برابر با ۲۲/۰۳۴۵ رادیان بر ثانیه است که این عدد نیز تا چهار رقم اعشار برابر با فرکانس دقیق مد دوم این تیر می‌باشد. همچنین، مشاهده می‌شود نمودارهای فرکانس‌های اول و دوم این تیر در بتاهای خاصی به یکدیگر می‌رسند. به‌عبارتی‌دیگر، بتاهایی وجود دارد که به ازای آن بتاها مقادیر فرکانس اول و دوم این تیر با یکدیگر برابر می‌شود که در حقیقت، در این حالت مقدار فرکانس اول یا دوم برابر با فرکانس ارتعاش طبیعی تیر طره‌ای می‌باشد. در نتیجه، بدین‌طریق می‌توان فرکانس‌های طبیعی مدهای بالاتر سیستم را شناسایی نمود. راه دیگر شناسایی فرکانس‌های بالاتر سیستم این است که مقادیر بتاهایی که به ازای آن بتاها فرکانس اول و دوم سیستم یکی می‌گردد به دست آورده شود و طبق رابطه $\omega = \beta^2\sqrt{EI/m}$، مقدار فرکانس ارتعاش طبیعی مربوط به آن بتا محاسبه شود. در این مثال، این روش اتخاذ گردیده است و نتایج شناسایی فرکانس‌های مدهای سوم تا دوازدهم به همراه مقادیر فرکانس‌های اول و دوم در جدول (۵) آورده شده است.

با مقایسه فرکانس‌های شناسایی شده مدهای سوم تا دوازدهم با فرکانس‌های دقیق متناظرشان که در جدول (۳) آورده شده که مشاهده می‌شود اختلاف فرکانس‌ها در حد اعشار دوم بوده و این اختلاف ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است.

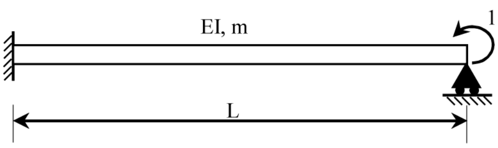


شکل (۸): نمودار تغییرات فرکانس اول و دوم تیر طره‌ای یکنواخت به ازای تغییرات β از ۰/۱ تا ۴۰.

در حقیقت، با استفاده از این روش ابتکاری می‌توان تنها با یک جزء محدود، فرکانس‌های ارتعاش طبیعی این تیر را با دقت خیلی بالایی به دست آورد و برخلاف روش اجزای محدود متعارف، خطای شناسایی فرکانس مدهای بالاتر افزایش نمی‌یابد بلکه اگر به‌صورت نسبی و درصدی محاسبه شود، این خطا کاهش نیز پیدا می‌کند.

۴-۲- تیر یک‌سر گیردار-یک‌سر مفصل یکنواخت

تیر یک‌سر گیردار-یک‌سر مفصل یکنواخت نشان داده شده در شکل (۹) را در نظر بگیرید. این تیر دارای سختی خمشی EI، جرم واحد طول m و نیز طول L می‌باشد. توسط نویسندگان این مقاله ثابت گردیده است که معادله مشخصه فرکانسی این سیستم برابر با $\sin\beta L\cosh\beta L-\sinh\beta L\cos\beta L=0$ است که در آن $\beta=\sqrt[4]{\omega^2 m/EI}$ می‌باشد. با استفاده از نرم‌افزار MATLAB، دوازده ریشه معادله مشخصه فرکانسی این مدل به دست آورده شد که مقادیر آن در جدول (۶) آورده شده است.



شکل (۹): مدل تیر یک‌سر گیردار-یک‌سر مفصل با سختی و جرم یکنواخت.

همچنین، با فرض اینکه طول تیر و نیز جرم واحد طول آن و همچنین، EI آن برابر واحد باشد، مقدار فرکانس زاویه‌ای تیر (ω) طبق رابطه $\omega=\sqrt{\beta^4 EI/m}$، برابر مجذور β می‌گردد که این کمیّت نیز محاسبه شده و در جدول (۶) آورده شده است.

در جدول (۷) یازده فرکانس طبیعی این مدل که با استفاده از روش اجزای محدود متعارف به دست آمده است، با فرکانس‌های دقیق این مدل مقایسه شده است. با دقت در این جدول، مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد جزءهای محدود، دقت شناسایی فرکانس‌ها مخصوصاً فرکانس‌های مدهای پایین افزایش می‌یابد. نکته دیگر این است که فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود همواره بزرگ‌تر از فرکانس‌های دقیق مدل هستند. در حالتی که تعداد اجزای محدود برابر ۶ می‌باشد خطای فرکانس‌های حاصل از روش اجزای محدود متعارف نسبت به فرکانس‌های دقیق متناظرشان به‌ترتیب شماره مد مقادیر ۰/۰۱۳، ۰/۱۳، ۰/۵۴، ۱/۴۶، ۲/۷۷، ۱۱/۱۳، ۱۴/۱۴، ۲۱/۳۸، ۳۱/۱۰، ۴۰/۷۷ و ۴۰/۸۰ درصد است. مشاهده می‌شود خطای فرکانس‌های حاصل از روش اجزای محدود برای مد ششم و بالاتر از آن، بیشتر از ده درصد است و بیشترین خطا مربوط به فرکانس مد یازدهم است که برابر ۴۰/۸۰ درصد می‌باشد.

جدول (۵): فرکانس‌های زاویه‌ای شناسایی شده تیر طره‌ای یکنواخت با استفاده از روش ابتکاری.

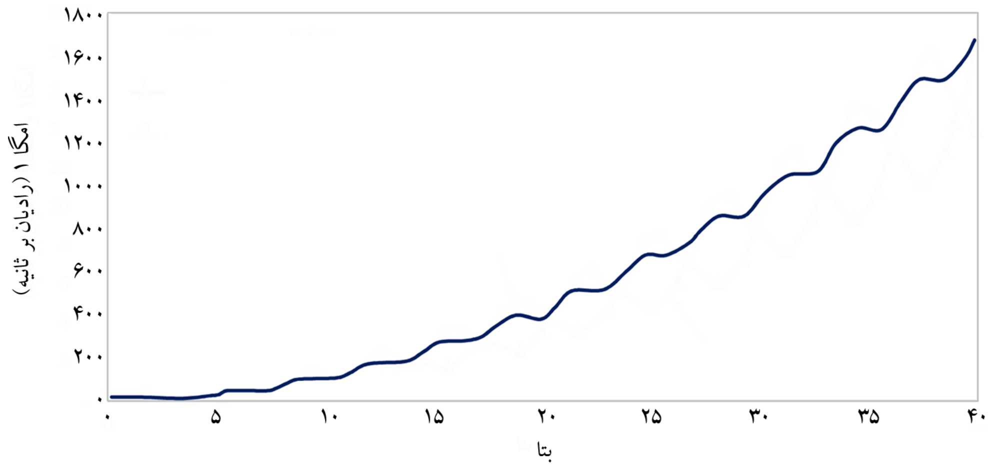
مود	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فرکانس	۳/۵۱۶۰	۲۲/۰۳۴۵	۶۱/۶۸۵۳	۱۲۰/۹۰۱۰	۱۹۹/۸۵۴۸	۲۹۸/۵۶۳۸
مود	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
فرکانس	۴۱۶/۹۷۶۴	۵۵۵/۱۶۷۸	۷۱۳/۰۷۶۹	۸۹۰/۷۲۴۰	۱۰۸۸/۱۴۲۰	۱۳۰۵/۲۳۲۰

جدول (۶): ریشه‌های معادله مشخصه فرکانسی و فرکانس‌های زاویه‌ای تیر یک‌سرگیردار-یک‌سر مفصل با سختی و جرم یکنواخت.

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ریشه	۳/۹۲۶۶	۷/۰۶۸۶	۱۰/۲۱۰۲	۱۳/۳۵۱۸	۱۶/۴۹۳۴	۱۹/۶۳۵۰
فرکانس زاویه‌ای	۱۵/۴۱۸۲	۴۹/۹۶۴۹	۱۰۴/۲۴۷۷	۱۷۸/۲۶۹۷	۲۷۲/۰۳۱۰	۳۸۵/۵۳۱۴
شماره	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
ریشه	۲۲/۷۷۶۵	۲۵/۹۱۸۱	۲۹/۰۵۹۷	۳۲/۲۰۱۰	۳۵/۳۴۳۰	۳۸/۴۸۵۰
فرکانس زاویه‌ای	۵۱۸/۷۷۱۱	۶۷۱/۷۴۹۹	۸۴۴/۴۶۸۰	۱۰۳۶/۹۲۵۰	۱۲۴۹/۱۲۲۰	۱۴۸۱/۰۵۸۰

جدول (۷): مقایسه فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود متعارف با فرکانس‌های دقیق تیر یک‌سرگیردار- یک‌سر مفصل یکنواخت.

شماره مود	تعداد اجزای محدود (N_e)						فرکانس‌های دقیق
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	
۱	۲۰/۴۹۳۹	۱۵/۵۶۰۸	۱۵/۴۴۸۵	۱۵/۴۲۷۹	۱۵/۴۲۲۲	۱۵/۴۲۰۲	۱۵/۴۱۸۲
۲	--------	۵۸/۴۰۶۰	۵۰/۸۳۸۱	۵۰/۲۷۶۶	۵۰/۰۹۶۸	۵۰/۰۲۹۵	۴۹/۹۶۴۹
۳	--------	۱۵۵/۶۳۹۱	۱۱۸/۴۶۵۸	۱۰۶/۵۹۶۹	۱۰۵/۳۶۴۳	۱۰۴/۸۰۹۹	۱۰۴/۲۴۷۷
۴	--------	--------	۲۲۷/۸۴۷۲	۲۰۰/۱۷۵۸	۱۸۲/۸۴۸۴	۱۸۰/۸۷۹۹	۱۷۸/۲۶۹۷
۵	--------	--------	۴۰۳/۴۹۸۵	۳۲۶/۳۵۹۶	۳۰۳/۴۹۴۹	۲۷۹/۵۷۰۷	۲۷۲/۰۳۱۰
۶	--------	--------	--------	۵۲۱/۰۷۷۲	۴۴۸/۱۹۳۲	۴۲۸/۴۲۸۷	۳۸۵/۵۳۱۴
۷	--------	--------	--------	۷۵۴/۳۹۶۲	۶۵۵/۵۹۴۶	۵۹۲/۱۱۱۵	۵۱۸/۷۷۱۱
۸	--------	--------	--------	--------	۹۳۳/۶۸۴۶	۸۱۵/۳۷۳۰	۶۷۱/۷۴۹۹
۹	--------	--------	--------	--------	۱۲۰۶/۲۹۴۰	۱۱۰۷/۱۲۰۰	۸۴۴/۴۶۸۰
۱۰	--------	--------	--------	--------	--------	۱۴۵۹/۷۲۹۰	۱۰۳۶/۹۲۵۰
۱۱	--------	--------	--------	--------	--------	۱۷۵۸/۷۲۸۰	۱۲۴۹/۱۲۲۰



شکل (۱۰): نمودار تغییرات فرکانس اول تیر یکنواخت یک‌سرگیردار-یک‌سر مفصل به ازای تغییرات β از ۰/۱ تا ۴۰.

در روش ابتکاری ارائه شده در این مقاله، تیر یک‌سر گیردار-یک‌سر مفصل مورد بحث با یک جزء محدود مدل گردید. طول تیر برابر واحد فرض شد. همچنین، جرم واحد طول آن و EI آن نیز برابر یک در نظر گرفته شد. با استفاده از تابع درون‌یابی جدیدی که در بخش قبل معرفی گردید، فرکانس اول این تیر (ω_1) به ازای βهای مختلف محاسبه شد. در شکل (۱۰) نمودار تغییرات فرکانس اول این تیر به ازای تغییر β از ۰/۱ تا ۴۰ با افزایش ۰/۰۰۱ (ω_1) رسم گردیده است. لازم به ذکر است چون این تیر با یک جزء محدود مدل شده است، پس از اعمال شرایط تکیه‌گاهی تنها یک درجه آزادی دورانی برای آن باقی مانده است و لذا تنها فرکانس اول آن محاسبه شده است.

نمودار تغییرات فرکانس اول این سیستم (ω_1) بر حسب β در شکل (۱۰) نشان داده شده است. این نمودار دارای مینیمم مطلقی برابر با ۱۵/۴۱۸۲ رادیان بر ثانیه است که با مقدار دقیق فرکانس اول سیستم که به‌صورت تحلیلی به دست می‌آید تا چهار رقم اعشار کاملاً یکسان و برابر است. مقادیر مینیمم‌های محلی دیگر این نمودار نیز استخراج گردید. این مقادیر و همچنین مقادیر فرکانس‌های تحلیلی متناظر این مینیمم‌ها در جدول (۸) قید شده است.

جدول (۸): مقادیر مینیمم‌های فرکانس اول تیر یکنواخت یک‌سرگیردار-یک‌سر مفصل و مقادیر تحلیلی متناظر آنها.

شماره اکسترمم	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
مقدار مینیمم	۱۵/۴۱۸۲	۴۹/۹۶۴۹	۱۰۴/۲۴۷۷	۱۷۸/۲۶۹۷	۲۷۲/۰۳۱۰	۳۸۵/۵۳۱۴
مقدار تحلیلی	۱۵/۴۱۸۲	۴۹/۹۶۴۹	۱۰۴/۲۴۷۷	۱۷۸/۲۶۹۷	۲۷۲/۰۳۱۰	۳۸۵/۵۳۱۴
شماره اکسترمم	**هفتم**	**هشتم**	**نهم**	**دهم**	**یازدهم**	**دوازدهم**
مقدار مینیمم	۵۱۸/۷۷۱۱	۶۷۱/۷۵۰۰	۸۴۴/۴۶۸۰	۱۰۳۶/۹۲۵	۱۲۴۹/۱۲۲۰	۱۴۸۱/۰۵۸۰
مقدار تحلیلی	۵۱۸/۷۷۱۱	۶۷۱/۷۴۹۹	۸۴۴/۴۶۸۰	۱۰۳۶/۹۲۵	۱۲۴۹/۱۲۲۰	۱۴۸۱/۰۵۸۰

جدول (۹): ریشه‌های معادله مشخصه فرکانسی و فرکانس‌های زاویه‌ای غیر صفر تیر دو سر آزاد با سختی و جرم یکنواخت.

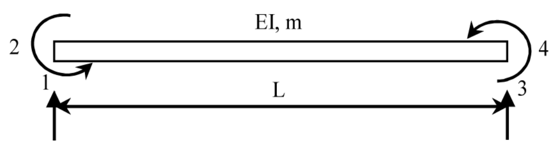
شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ریشه	۴/۷۳۰۰	۷/۸۵۳۲	۱۰/۹۹۵۶	۱۴/۱۳۷۲	۱۷/۲۷۸۸	۲۰/۴۲۰۴
فرکانس زاویه‌ای	۲۲/۳۷۳۳	۶۱/۶۷۲۸	۱۲۰/۹۰۳۴	۱۹۹/۸۵۹۴	۲۹۸/۵۵۵۵	۴۱۶/۹۹۰۸
شماره	**۷**	**۸**	**۹**	**۱۰**	**۱۱**	**۱۲**
ریشه	۲۳/۵۶۱۹	۲۶/۷۰۳۵	۲۹/۸۴۵۱	۳۲/۹۸۶۷	۳۶/۱۲۸۳	۳۹/۲۶۹۹
فرکانس زاویه‌ای	۵۵۵/۱۶۵۲	۷۱۳/۰۷۸۹	۸۹۰/۷۳۱۸	۱۰۸۸/۱۲۴۲	۱۳۰۵/۲۵۵۳	۱۵۴۲/۱۲۶۱

با دقت در جدول (۸) مشاهده می‌شود که مقادیر مینیمم فرکانس‌های اول سیستم با مقادیر دقیق و تحلیلی متناظرشان تا چهار رقم اعشار کاملاً یکسان هستند. فقط فرکانس هشتم شناسایی شده با مقدار تحلیلی آن به اندازه ۰/۰۰۰۱ اختلاف دارد. در نتیجه، می‌توان گفت برای این سیستم، فرکانس‌های شناسایی شده با فرکانس‌های دقیق سیستم کاملاً یکسان است و در حقیقت، این روش همان روش تحلیلی است که به شکل و صورت اجزای محدودی در آمده است.

۴-۳- تیر دو سر آزاد یکنواخت

تیر دو سر آزاد یکنواخت نشان داده شده در شکل (۱۱) را در نظر بگیرید. این تیر دارای سختی خمشی EI، جرم واحد طول m و نیز طول L می‌باشد. توسط نویسندگان این مقاله ثابت گردیده است که معادله مشخصه فرکانسی این سیستم برابر با $\cos\beta L\cosh\beta L-1=0$ است که در آن $\beta=\sqrt[4]{\omega^2 m/EI}$ می‌باشد. با استفاده از نرم‌افزار MATLAB دوازده ریشه معادله مشخصه فرکانسی این مدل به دست آورده شد که مقادیر آن در جدول (۹) آورده شده است.

همچنین، با فرض اینکه طول تیر و نیز جرم واحد طول آن و همچنین، EI آن برابر واحد باشد، مقدار فرکانس زاویه‌ای تیر (ω) طبق رابطه $\omega=\sqrt{\beta^4 EI/m}$، برابر مجذور β می‌گردد که این کمیّت نیز محاسبه شده است و در جدول (۹) آورده شده است.

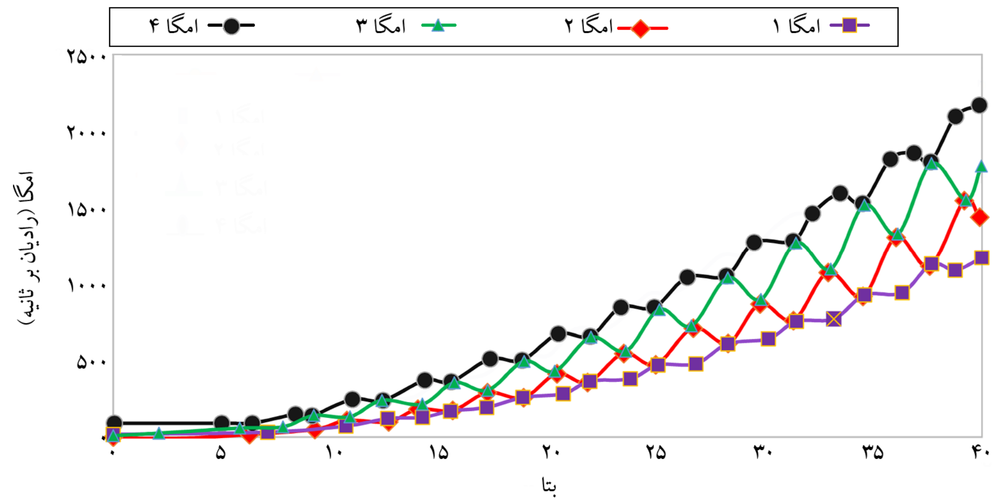


شکل (۱۱): مدل تیر یکنواخت دو سر آزاد.

در جدول (۱۰) ده فرکانس طبیعی غیر صفر این مدل که با استفاده از روش اجزای محدود متعارف به دست آمده است، با فرکانس‌های دقیق این مدل مقایسه شده است. با دقت در این جدول، مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد جزءهای محدود دقت شناسایی فرکانس‌ها مخصوصاً فرکانس‌های مدهای پایین افزایش می‌یابد. نکته دیگر این است که فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود همواره بزرگ‌تر از فرکانس‌های دقیق مدل هستند. در حالتی که تعداد اجزای محدود برابر ۵ می‌باشد خطای فرکانس‌های حاصل از روش اجزای محدود متعارف نسبت به

جدول (۱۰): مقایسه فرکانس‌های غیر صفر به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود متعارف با فرکانس‌های دقیق تیر دو سر آزاد یکنواخت.

شماره مود	تعداد اجزای محدود (N_e)					فرکانس‌های دقیق
	۱	۲	۳	۴	۵	
۱	۲۶/۸۳۲۸	۲۲/۴۲۳۲	۲۲/۴۳۴۸	۲۲/۳۹۷۶	۲۲/۳۸۴۱	۲۲/۳۷۳۳
۲	۹۱/۶۵۱۵	۷۰/۱۷۷۵	۶۱/۹۹۲۳	۶۲/۰۵۶۸	۶۱/۸۶۹۳	۶۱/۶۷۲۸
۳	--------	۱۷۵/۴۷۹۹	۱۳۵/۹۷۳۵	۱۲۱/۸۶۰۳	۱۲۲/۰۶۹۳	۱۲۰/۹۰۳۴
۴	--------	۲۸۰/۳۴۸۲	۲۴۴/۰۷۵۸	۲۲۳/۲۹۱۳	۲۰۱/۸۵۱۱	۱۹۹/۸۵۹۴
۵	--------	--------	۴۷۲/۶۱۷۹	۳۴۹/۶۲۲۹	۳۳۲/۱۷۱۵	۲۹۸/۵۵۵۵
۶	--------	--------	۵۸۱/۳۸۹۵	۵۴۲/۲۳۸۰	۴۷۸/۲۱۰۳	۴۱۶/۹۹۰۸
۷	--------	--------	--------	۹۰۲/۹۶۲۹	۶۸۲/۱۰۸۱	۵۵۵/۱۶۵۲
۸	--------	--------	--------	۹۹۶/۹۲۲۳	۹۶۴/۴۹۸۳	۷۱۳/۰۷۸۹
۹	--------	--------	--------	--------	۱۴۵۵/۴۹۸۱	۸۹۰/۷۳۱۸
۱۰	--------	--------	--------	--------	۱۵۲۹/۲۹۸۳	۱۰۸۸/۱۲۴۲



شکل (۱۲): نمودار تغییرات فرکانس اول، دوم، سوم و چهارم تیر یکنواخت دو سر آزاد به ازای تغییرات β از ۰/۱ تا ۴۰.

فرکانس‌های دقیق متناظرشان به‌ترتیب شماره مد مقادیر ۰/۰۴۸، ۰/۳۲، ۰/۹۶، ۱/۰۰، ۱۱/۲۶، ۱۴/۶۸، ۲۲/۸۷، ۳۵/۲۶، ۶۳/۴۰ و ۴۰/۵۴ درصد است. مشاهده می‌شود خطای فرکانس‌های حاصل از روش اجزای محدود برای مد پنجم و بالاتر از آن، بیشتر از ده درصد است و بیشترین خطا مربوط به فرکانس مد نهم است که برابر با ۶۳/۴۰ درصد می‌باشد.

در روش ابتکاری ارائه شده در این مقاله، تیر دو سر آزاد مورد بحث با یک جزء محدود مدل گردید؛ مانند مدل‌های قبلی، طول تیر برابر واحد فرض شد. همچنین، جرم واحد طول آن، m و EI آن نیز برابر یک در نظر گرفته شد. با استفاده از توابع درون‌یابی جدیدی که در بخش قبل معرفی گردید، فرکانس‌های اول، دوم، سوم و چهارم این تیر به ازای βهای مختلف محاسبه شد. در شکل (۱۲) نمودار تغییرات فرکانس اول (ω_1)، فرکانس دوم (ω_2)، فرکانس سوم (ω_3) و فرکانس چهارم (ω_4) این تیر به ازای تغییر β از ۰/۱ تا ۴۰ با افزایش ۰/۰۰۱ رسم گردیده است.

با مشاهده نمودارهای رسم شده در شکل (۱۲) دیده می‌شود که مقادیر فرکانس‌های اول و دوم برای بتاهای کوچک تقریباً برابر با صفر است که این موضوع ناشی از این مسئله است که تیر مورد بررسی دارای دو مد حرکتی صلب است. مقادیر مینیمم فرکانس‌های اول تا چهارم به‌ترتیب مقادیر $۵/۶۵۰۲\times۱۰^{-۷}$، $۳/۷۱۴۱\times۱۰^{-۶}$،

جدول (۱۱): ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های محلی فرکانس دوم و سوم تیر یکنواخت دو سر آزاد و مقادیر میانگین آنها.

شماره اکسترمم	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
ماکزیمم	۲۲/۳۷۲۴	۶۱/۶۶۶۵	۱۲۰/۸۹۷۰	۱۹۹/۸۴۵۶	۲۹۸/۵۴۶۱	۴۱۶/۹۵۶۰
مینیمم	۲۲/۳۷۳۴	۶۱/۶۷۴۴	۱۲۰/۹۱۳۳	۱۹۹/۸۶۳۹	۲۹۸/۵۸۱۶	۴۱۷/۰۰۹۷
میانگین	۲۲/۳۷۲۹	۶۱/۶۷۰۵	۱۲۰/۹۰۵۲	۱۹۹/۸۵۴۸	۲۹۸/۵۶۳۹	۴۱۶/۹۸۲۹
مقادیر دقیق	۲۲/۳۷۳۳	۶۱/۶۷۲۸	۱۲۰/۹۰۳۴	۱۹۹/۸۵۹۴	۲۹۸/۵۵۵۵	۴۱۶/۹۹۰۸
قدر مطلق خطا (درصد)	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۱۹
شماره اکسترمم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	یازدهم	دوازدهم
ماکزیمم	۵۵۵/۱۶۱۵	۷۱۳/۰۳۸۶	۸۹۰/۷۰۲۵	۱۰۸۸/۰۸۹۰	۱۳۰۵/۱۶۳۰	۱۵۴۲/۱۱۰۰
مینیمم	۵۵۵/۱۷۴۳	۷۱۳/۱۲۵۸	۸۹۰/۷۴۵۹	۱۰۸۸/۱۹۶۰	۱۳۰۵/۳۰۲۰	۱۵۴۲/۱۵۶۰
میانگین	۵۵۵/۱۶۷۹	۷۱۳/۰۸۲۲	۸۹۰/۷۲۴۲	۱۰۸۸/۱۴۳۰	۱۳۰۵/۲۳۳۰	۱۵۴۲/۱۳۳۰
مقادیر دقیق	۵۵۵/۱۶۵۲	۷۱۳/۰۷۸۹	۸۹۰/۷۳۱۸	۱۰۸۸/۱۲۴۰	۱۳۰۵/۲۵۵۰	۱۵۴۲/۱۲۶۰
قدر مطلق خطا (درصد)	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۰۴

۲۲/۳۷۳۴ و ۷۵/۱۹۲۷ رادیان بر ثانیه است. مقادیر دقیق فرکانس اول و دوم غیر صفر این تیر به‌ترتیب مقادیر ۲۲/۳۷۳۳ و ۶۱/۶۷۲۸ رادیان بر ثانیه می‌باشد. ملاحظه می‌شود فرکانس اول غیر صفر شناسایی شده همخوانی خیلی خوبی با مقدار دقیق آن دارد ولی فرکانس دوم غیر صفر را نمی‌توان به‌عنوان فرکانس دوم تیر در نظر گرفت. برای شناسایی فرکانس‌های بالاتر، مقادیر ماکزیمم‌های نسبی فرکانس دوم (ω_2) و مقادیر مینیمم‌های نسبی فرکانس سوم (ω_3) به‌عنوان فرکانس‌های طبیعی تیر تلقی گردید و این ماکزیمم‌ها و مینیمم‌ها شناسایی گردیدند و میانگین آنها به‌عنوان فرکانس طبیعی تیر در نظر گرفته شد و این مقادیر با مقادیر دقیق متناظرشان مقایسه گردید که نتایج کار در جدول (۱۱) آورده شده است. با دقت در این جدول، مشاهده می‌شود اختلاف بین مقادیر دقیق فرکانس و مقادیر شناسایی شده متناظرش بسیار ناچیز است و حداکثر قدر مطلق خطا ۰/۰۰۳۷ درصد می‌باشد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از توابع درون‌یابی جدیدی که متشکل از مجموع توابع سینوسی، کسینوسی و نمایی بود و در حقیقت جملات آن برگرفته از حل دقیق معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد تیرها بود، فرکانس‌های سه مدل تیر خمشی یکنواخت به دست آورده شد. فرکانس‌هایی که از این روش به دست آمد در اکثر موارد اختلاف ناچیزی با مقادیر دقیق فرکانس‌های متناظر آن تیر داشت، اما چون در این روش باید نمودار تغییرات فرکانس‌های مختلف تیر به ازای تغییر بتا در بازه‌ای مناسب و با گامی مشخص، رسم گردد و با توجه به چگونگی تغییرات آن، فرکانس‌های ارتعاش طبیعی تیر استخراج گردد، احتیاج به قضاوت مهندسی و همچنین داشتن جواب‌های دقیق فرکانس‌های ارتعاش آزاد تیر و یا لااقل داشتن فرکانس‌های تقریبی تیر است که از روش اجزای محدود متعارف و با تعداد اجزای محدود نسبتاً زیاد به دست آمده است. در واقع این روش می‌تواند مکمل روش اجزای محدود متعارف باشد و منجر به شناسایی دقیق‌تر فرکانس‌های مدهای ارتعاشی بالای تیرهای خمشی با جرم و الاستیسیته پیوسته گردد. در حقیقت، در سه مثال حل شده در این مقاله، پارامتر بتا از ۰/۰۱ تا ۴۰ و با میزان افزایش ۰/۰۱ تغییر یافته است. در واقع، به ازای ۴۰۰۰ مقدار برای پارامتر بتا، فرکانس‌های این سه مدل محاسبه گردیده و نمودارهای آن بر حسب بتا رسم شده است و با توجه به این نمودارها و داشتن فرکانس‌های تقریبی که از روش اجزای محدود متعارف به دست آمده است، فرکانس‌های دقیق سیستم شناسایی شده است. در نتیجه، ملاحظه می‌گردد که

استفاده از این تابع شکل حجم محاسبات را به‌شدت افزایش می‌دهد. لازم به ذکر است برای اینکه این روش به‌طور مستقل از روش اجزای محدود متعارف به‌کار گرفته شود، احتیاج به تلاش و برنامه‌ریزی جدیدی می‌باشد که نویسندگان این مقاله برآنند در این راستا این کار را در پژوهش‌های بعدی خود انجام دهند.

همچنین، پیشنهاد می‌گردد در تحقیقات بعدی، فرکانس‌های ارتعاش طبیعی مدل‌های بیشتری که شامل قاب‌های دو بعدی نیز باشد، از این روش به‌دست آورده شود. سپس، کارآیی این روش مورد تجزیه‌وتحلیل بیشتری قرار گیرد. علاوه بر این، چون این روش ابتکاری در مراحل ابتدایی خود می‌باشد، لازم است کارایی آن برای شناسایی فرکانس‌های طبیعی تیرهای خمشی با مقطع متغیر نیز مورد بررسی قرار گیرد. محاسبه فرکانس دقیق این تیرها به‌صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست و یا برای موارد خاصی ممکن می‌باشد و در نتیجه باید از روش‌های عددی برای محاسبه فرکانس آنها استفاده کرد.

مراجع

1. Chopra, A.K. (2012) *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Fourth Edition, Prentice-Hall.
2. Banerjee, J.R. (1997) Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach. *Computers and Structures*, **63**, 101-103.
3. Zeng, P. (1998) Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and C0 element (bar). *Journal of Sound and Vibration*, **218**, 619-658.
4. Zeng, P. (1998) Composite element method for vibration analysis of structures, part II: C1 element (beam). *Journal of Sound and Vibration*, **218**, 659-696.
5. Tahooni, Sh. (1996) *Finite Elements for Structural Analysis*. Second Edition, Science and Literature Publications (in Persian).
6. Sadrnejad, S.A. (2009) *Introduction to Finite Elements Method*. Second Edition, K.N. Toosi University of Technology Publications (in Persian).
7. Hanselman, D. and Littlefield, B. (1996) *Mastering MATLAB, A Comprehensive Tutorial and Reference*. First Edition, Prentice-Hall.

فهرست علائم

EI: سختی خمشی تیر

L: طول تیر

m: جرم واحد طول تیر

u: تغییر مکان جانبی تیر

$\varphi_n(x)$: پارامتری که فقط تابع مکان است و شکل مد ارتعاشی nام تیر را نشان می‌دهد.

ω_i: فرکانس زاویه‌ای مد iام سیستم

β_i: پارامتری برابر با $\beta_i = \frac{\omega_i^2 m}{EI}$

$\psi_i(x)$: توابع درون‌یابی (توابع شکل) جزء محدود

$\bar{k}_e$: ماتریس سختی جزء محدود

$\bar{m}_e$: ماتریس جرم جزء محدود

N_e: تعداد اجزای محدود به‌کار گرفته شده در مدل

Calculation of Natural Frequencies of Two-Dimensional Prismatic Bending Beams with Distributed Mass and Elasticity Using an Innovative Method

Masoud Mahmoodabadi[1*], Seyed Mohammad Reza Hasani[2] and Babak Taqavi[3]

1. Assistant Professor, University of Qom, Faculty of Technology and Engineering, Qom, Iran, *Corresponding Author, email: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir
2. Ph.D. Candidate, Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University, Babol, Mazandaran, Iran
3. Ph.D. Candidate, University of Qom, Faculty of Technology and Engineering, Qom, Iran

Usually, by modeling the structures using the finite element method, their undamped free vibration frequencies are calculated analytically. In addition, the issue of accurate calculation of natural frequencies and the shape of vibration modes corresponding to them for bending systems that have distributed mass and elasticity and possibly a combination of several bending beams, sometimes requires solving complex mathematical equations and requires a relatively heavy mathematical work demands. Bending beams are beams whose axial deformations is insignificant compared to their bending deformations, and as a result, these members are assumed to be axially rigid. By using the conventional finite element method, the natural vibration frequencies of these beams can be obtained approximately. By increasing the number of finite elements used in the model, the calculation error of natural frequencies of vibration decreases. When the consistent-mass matrix is used, the frequency values obtained from the finite element method converge to the exact frequency values with larger values, while if the lumped-mass matrix is used, the frequency values obtained from the finite element method converge to the exact frequency values with smaller values. It should be noted that the consistent-mass matrix is non-diagonal, but the lumped-mass matrix is diagonal. The interpolation functions (shape functions) used for bending finite elements (beam elements) are polynomial functions of the 3rd degree. This bending finite element has two nodes, each node has one translational degree of freedom and one rotational degree of freedom. The new idea that came to the authors of this article is that instead of using polynomial functions, trigonometric and exponential interpolation functions are used to calculate the stiffness matrix and mass matrix of the finite element. In fact, these trigonometric and exponential functions are the solutions of the differential equation governing the free vibration of bending beams with distributed mass and elasticity. The argument of these trigonometric and exponential functions includes a parameter called beta, which is proportional to the square root of angular frequency of the bending beam. By changing this parameter in a suitable range and with a certain step, it is possible to plot the changes in the frequencies of the different modes of the studied prismatic beam in terms of beta. In this paper, three models were studied, which included a uniform cantilever beam, a uniform beam clamped at left side and simply supported at right side, and a uniform beam free at both ends. Using the conventional finite element method and using the consistent-mass matrix, these three models were analyzed and the approximate frequencies of the first few modes of these beams were calculated, which were greater than their corresponding exact values. In the innovative method presented in this article, a uniform beam was modeled with a finite element model with one translational degree of freedom and one rotational degree of freedom. The stiffness matrix and the mass matrix of this beam were calculated for different betas and having these two matrices, the first and second frequency values of this model were calculated for different beta values and its graph was drawn for different betas. The values of the maximum frequency of the first frequency are the same as the values of the minimum frequency of the second for certain betas, and by specifying these betas, the frequencies of different vibration modes can be accurately determined. The detected frequencies of different modes with this method had a very good match with their exact corresponding frequencies. For the second model investigated in this paper, one rotational degree of freedom was considered. Considering that this beam had only one rotational degree of freedom, therefore, by plotting the first frequency of this model for different betas and finding its minimum, the frequency

values of different modes of this beam were obtained, which matched the exact values like the previous model very well. The third model was the same as the previous two models. The diagram of the first to fourth natural frequencies of this model was drawn for different betas. By having the approximate values of the frequencies of different modes obtained from the conventional finite element method and these diagrams, the frequencies of different modes of the model were identified, which were in good agreement with their corresponding exact values.

Keywords: Natural frequencies, Distributed Systems, Finite Element, Interpolation Functions.